Ejercicios resueltos

Boletín 5

Campo eléctrico

Ejercicio 1

La masa de un protón es $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg y su carga eléctrica $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Compara la fuerza de repulsión eléctrica entre dos protones situados en el vacío con la fuerza de atracción gravitatoria que actúa entre ellos.

Solución 1

Dividiendo los módulos de la fuerza gravitatoria y de la fuerza electrostática, se tiene:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{K\,q^2/r^2}{G\,m^2/r^2} = \frac{K\,q^2}{G\,m^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}67 \cdot 10^{-27})^2} = 1{,}24 \cdot 10^{36}$$

Para partículas cargadas, las fuerzas gravitatorias son despreciables frente a las fuerzas eléctricas. Las fuerzas gravitatorias son importantes para objetos de gran masa y sin carga eléctrica apreciable, tal como es el caso de la Tierra y los objetos colocados en su superficie.

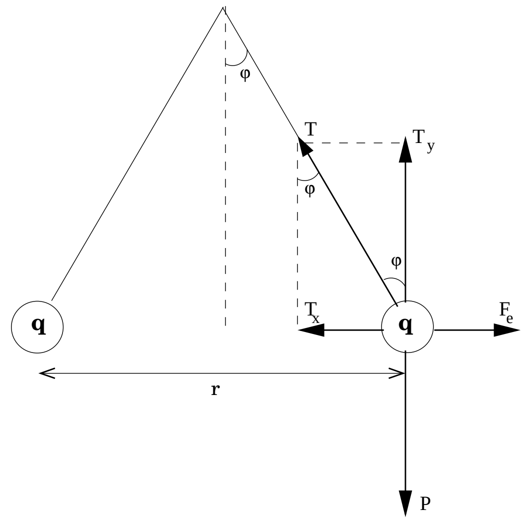
Ejercicio 2

Dos pequeñas bolas, de 10 g de masa cada una de ellas, están suspendidas del mismo punto mediante dos hilos de 1 m de longitud cada uno. Si al cargar las bolitas con la misma carga eléctrica, los hilos se separan formando un ángulo de 10°, determina el valor de la carga eléctrica.

Solución 2

Sobre cada bola actúan su peso, la tensión del hilo y la fuerza eléctrica. Aplicando la condición de equilibrio, se tiene que:

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_e = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} T_x & = & F_e \\ T_y & = & P \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} T\,\sin\varphi & = & \frac{K\,q^2}{r^2} \\ T\,\cos\varphi & = & m\,g \end{array} \right.$$



Dividiendo:

$$\tan\varphi = \frac{K\,q^2}{m\,g\,r^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{m\,g\,r^2\,\tan\varphi}{K}} = r\,\sqrt{\frac{m\,g\,\tan\varphi}{K}}$$

Si la longitud del hilo es igual a d y como cada bola se separa de la vertical un ángulo $\varphi = 5°$, la distancia entre ellas es: $r = 2\,d\,\sin 5$. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$q = 2\cdot 1\cdot \sin\,5°\,\sqrt{\frac{10\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot \tan\,5°}{9\cdot 10^9}} = 1{,}7\cdot 10^{-7}\text{ C}$$

Ejercicio 3

En el origen de coordenadas está situada una carga $q_1 = +3\ \mu$C y en el punto (4,0) otra carga $q_2 = -3\ \mu$C. Determina: el vector campo eléctrico en el punto A(0,3) y la fuerza que actúa sobre una carga $q_3 = -6\ \mu$C colocada en el punto A.

Solución 3

1. Cálculo del módulo del campo que crea la carga q_1 en el punto A.

$$E_1 = K\,\frac{|q_1|}{r_1^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{3\cdot 10^{-6}}{3^2} = 3000\text{ N/C}$$

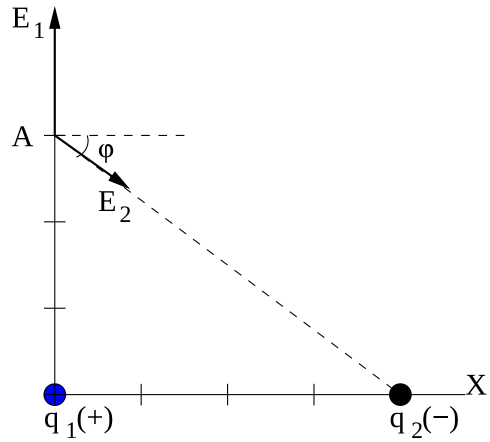
Vectorialmente: $\vec{E}_1 = 3000\,\vec{\jmath}\,$N/C

Cálculo del módulo del campo que crea la carga q_2 en el punto A.

$$E_2 = K\,\frac{|q_2|}{r_2^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{3\cdot 10^{-6}}{5^2} = 1080\text{ N/C}$$

Del diagrama se deduce que sus componentes son:

$$E_{2x} = E_2\,\cos\varphi = 1080\cdot\frac{4}{5} = 864\text{ N/C} \Rightarrow \vec{E}_{2x} = 864\,\vec{\imath}\,\text{N/C}$$



$$E_{2y} = E_2 \sin\varphi = 1080 \cdot \frac{3}{5} = 648 \text{ N/C} \Rightarrow \vec{E}_{2y} = -648\,\vec{\jmath}\text{ N/C}$$

Aplicando el principio de superposición el campo total en A tiene dos componentes:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{2x} = 864\,\vec{\imath}\text{ N/C}; \vec{E}_y = \vec{E}_1 + \vec{E}_{2y} = 3000\,\vec{\jmath} - 648\,\vec{\jmath} = 2352\,\vec{\jmath}\text{ N/C}$$

Por tanto el campo total en el punto A es:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = (864\,\vec{\imath} + 2352\,\vec{\jmath})\text{ N/C}$$

cuyo módulo es:

$$|\vec{E}| = \sqrt{864^2 + 2352^2} = 2506 \text{ N/C}$$

2. Como la carga localizada en A tiene signo negativo, la fuerza que actúa sobre ella tiene la misma dirección que el campo pero su sentido es el opuesto al mismo.

   Aplicando la definición del vector campo eléctrico, se tiene:

$$\vec{F} = q\,\vec{E} = -6 \cdot 10^{-6} \cdot (864\,\vec{\imath} + 2352\,\vec{\jmath}) = (-5{,}2 \cdot 10^{-3}\,\vec{\imath} - 0{,}014\,\vec{\jmath})\text{ N}$$

   Y su módulo: $F = |q|\,E = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 2506 = 0{,}015$ N

Ejercicio 4

Dos cargas $q_1 = 3$ μC y $q_2 = -6$ μC están situadas en el vacío a una distancia de 2 m. Calcula la variación de la energía potencial y el trabajo realizado para separarlas hasta una distancia de 4 m. Interpreta el signo del resultado obtenido.

Solución 4

La energía potencial asociada a la situación inicial y final de las cargas es:

$$E_{p,inicial} = K\,\frac{q_1\,q_2}{r_{inicial}} = 9 \cdot 10^9\,\frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot (-6 \cdot 10^{-6})}{2} = -0{,}081 \text{ J}$$

$$E_{p,final} = K\,\frac{q_1\,q_2}{r_{final}} = 9\cdot 10^9\,\frac{3\cdot 10^{-6}\cdot(-6\cdot 10^{-6})}{4} = -0{,}0405 \text{ J}$$

El trabajo que realiza la fuerza eléctrica en el proceso de separación de las cargas es:

$$W_{F(i\to f)} = -\Delta E_p = -(E_{p,final} - E_{p,inicial} = -[-0{,}0405-(-0{,}081)] = -0{,}0405 \text{ J}$$

Alejar dos cargas de distinto signo no es un proceso espontáneo, por lo que un agente externo tiene que realizar un trabajo contra la fuerza electrostática, que se almacena en forma de energía potencial eléctrica. La energía potencial eléctrica de la distribución final es mayor que la energía potencial eléctrica de la distribución inicial.

Ejercicio 5

En el origen de coordenadas está situada una carga $q_1 = +3\ \mu$C y en el punto $A(4{,}0)$ otra carga $q_2 = -3\ \mu$C. Si las cargas están situadas en el vacío y las coordenadas se expresan en metros, determina el trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar una carga $q_3 = -6\ \mu$C desde el punto $B(0{,}3)$ hasta el punto $C(3{,}0)$. Interpreta el signo obtenido.

Solución 5

Aplicando el teorema de Pitágoras, la distancia entre el punto A y el punto B son 5 m.

En ausencia de la carga q_3, el potencial en un punto es igual a la suma de los potenciales que crean cada una de las cargas fijas.

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = \frac{K\,q_1}{r_{1B}} + \frac{K\,q_2}{r_{2B}} = 9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = 3600 \text{ V}$$

$$V_C = V_{1C} + V_{2C} = \frac{K\,q_1}{r_{1C}} + \frac{K\,q_2}{r_{2C}} = 9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right) = -18000 \text{ V}$$

El trabajo que realizan las fuerzas del campo para trasladar la carga q_3 desde B hasta C es:

$$W_{B\to C} = -q\,\Delta V = -q\,(V_C - V_B) = -(-6\cdot 10^{-6})\cdot(-18000-3600) = -0{,}13 \text{ J}$$

Trasladar una carga negativa desde el punto B hasta el punto C no es un proceso espontáneo, un agente externo realiza un trabajo que se almacena en forma de energía potencial asociada a la nueva distribución.

Ejercicio 6

Una carga puntual de valor nq se coloca en el origen de coordenadas, mientras que otra carga de valor $-q$ se coloca sobre el eje X a una distancia d del origen. Calcula las coordenadas del punto donde el campo eléctrico es nulo si $n = 4$. ¿Cuánto valdrá el potencial electrostático en ese punto?

Solución 6

En la zona del eje X situada entre las cargas el campo eléctrico debido a cada una de ellas tiene la misma dirección y sentido, luego aquí no se puede anular el campo eléctrico.

Sea x la coordenada del punto en el que se anula el campo eléctrico. Este punto está situado a una distancia x del origen de coordenadas y a una distancia $(x - d)$ de la carga negativa. En este punto los módulos de los campos generados por cada una de las cargas son iguales.

$$E_+ = E_- \Rightarrow \frac{K\,nq}{x^2} = \frac{K\,q}{(x-d)^2} \Rightarrow n\,(x-d)^2 = x^2$$

Si $n = 4$, entonces: $2\,(x - d) = x \Rightarrow x = 2\,d$. El punto A está situado a una distancia $2\,d$ hacia la parte positiva del eje X.

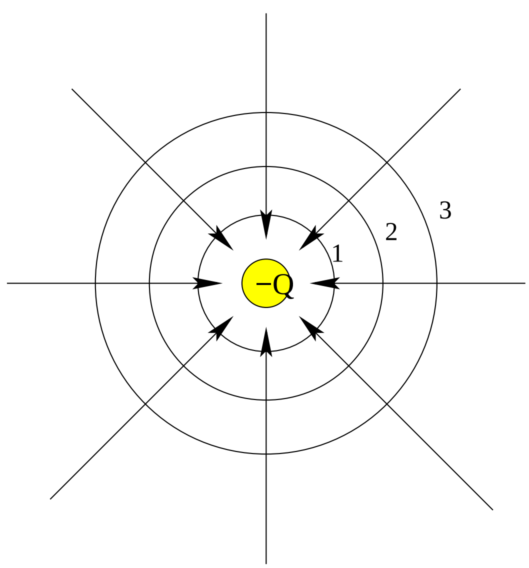
Aplicando la definición de potencial electrostático, se tiene que:

$$V_A = V_{A+} + V_{A-} = \frac{K \cdot 4 \cdot q}{2 \cdot d} + \frac{K \cdot (-q)}{d} = \frac{K\,q}{d}$$

Ejercicio 7

Dibuja las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales del campo eléctrico creado por una carga $q = -4$ μC. ¿Qué distancia hay entre la superficie equipotencial de -12000 V y la de -4000 V?

Solución 7



$V_1 < V_2 < V_3$

Las líneas de campo del campo eléctrico creado por una carga puntual son radiales y por convenio se dirigen hacia las cargas negativas. Las superficies equipotenciales del campo eléctrico creado por una carga puntual son esferas concéntricas centradas en la carga.

Aplicando la expresión que determina el potencial eléctrico en un punto del campo eléctrico creado por una carga puntual, se cumple que:

$$V = \frac{K\,q}{r} \Rightarrow r = \frac{K\,q}{V}$$

Sustituyendo para cada superficie equipotencial se tiene:

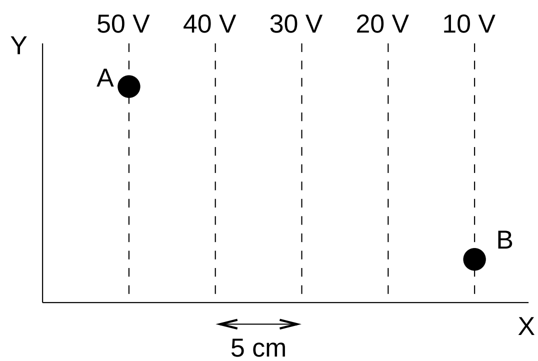
$$r_{(-4000)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6})}{-4000} = 9 \text{ m}$$

$$r_{(-12000)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-4 \cdot 10^{-6})}{-12000} = 3 \text{ m}$$

La separación entre ambas superficies es de 6 m.

Ejercicio 8

La figura adjunta representa las superficies equipotenciales en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico uniforme. Determina el vector campo eléctrico y dibuja las líneas de campo eléctrico. ¿Qué trabajo se realiza al trasladar un electrón desde el punto A hasta el punto B de la figura?



Solución 8

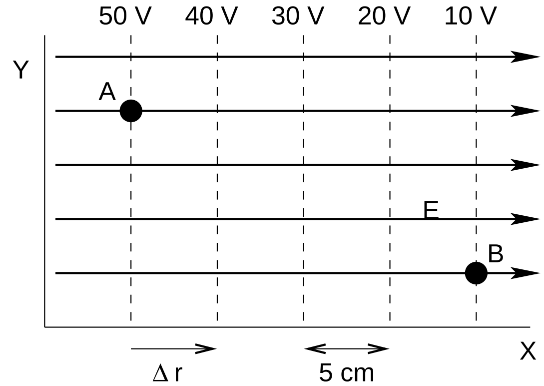
1. Las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales y tienen el sentido del potencial decreciente, por lo que su sentido es el de la parte positiva del eje X.

   Como las superficies equipotenciales están uniformemente espaciadas, el campo eléctrico es uniforme en esa región.

   Al avanzar según el eje de las abscisas, el vector campo eléctrico y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido. Por tanto, el módulo del campo eléctrico es:

   $$E\,\cos\varphi = -\frac{\Delta V}{\Delta r}; \quad E\,\cos 0 = -\frac{40 - 50}{0{,}05} = 200 \text{ V/m}$$

   La expresión vcetorial del campo eléctrico es: $\vec{E} = 200\,\vec{\imath}$ V/m.



2. El trabajo que realizan las fuerzas del campo es independiente de la trayectoria.

$$W_{A\to B} = -q\Delta V = -q\,(V_B - V_A) = -(-1{,}6\cdot 10^{-19})\cdot(10-50) = -6{,}4\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

   El proceso no es espontáneo, un agente externo realiza un trabajo al trasladar al electrón que se almacena en forma de energía potencial eléctrica asociada a la nueva posición del electrón dentro del campo eléctrico.

Ejercicio 9

En una región del espacio actúa un campo eléctrico uniforme, de forma que al trasladar una carga de 0,4 C desde el punto $A(x,0)$ hasta el punto $B(x+0{,}2,0)$, la fuerza eléctrica realiza un trabajo de -200 J. Si al punto A se le asigna un potencial eléctrico de 20 V, calcula el potencial del punto B y la componente del campo eléctrico en la dirección del eje X.

Solución 9

Si se elige el punto A como origen de un sistema de referencia con el eje X paralelo a la dirección del campo, entonces la coordenada del punto B es: $x_B = 0{,}2$ m

Aplicando la relación entre el trabajo y la diferencia de potencial entre esos puntos, se tiene:

$$W_{A\to B} = -q\,\Delta V = -q\,(V_B - V_A);\quad -200 = -0{,}4\cdot(V_B - 20) \Rightarrow V_B = 520\ \mathrm{V}$$

Aplicando la relación entre el potencial y el campo, resulta que:

$$E\,\cos\varphi = -\frac{\Delta V}{\Delta r} = -\frac{520-20}{0{,}20} = -2500\ \mathrm{V/m}$$

Vectorialmente: $\vec{E} = -2500\,\vec{\imath}\ \mathrm{V/m}$

El campo eléctrico tiene el sentido del potencial decreciente.

Ejercicio 10

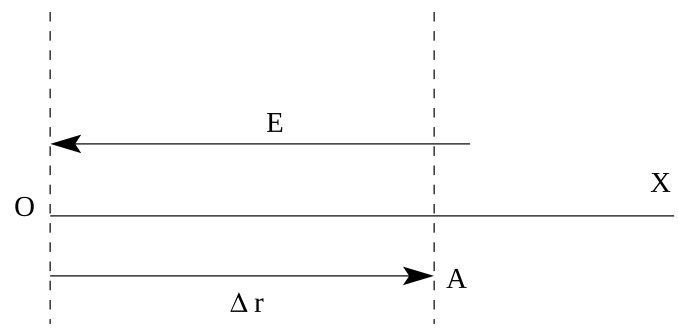
Un electrón se deja en reposo en el origen de coordenadas donde actúa un campo eléctrico uniforme de intensidad: $\vec{E} = -400\,\vec{\imath}$ N/C. Determina la diferencia de potencial entre el origen de coordenadas y el punto $A(5, 0)$ cm. Calcula la velocidad del electrón cuando pasa por el citado punto A.

Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

Solución 10

1. Al realizar un desplazamiento desde el origen de coordenadas hasta el punto A, el vector campo eléctrico y el desplazamiento forman un ángulo de 180°. Aplicando la relación entre el potencial y el campo, se tiene:

$$E\,\cos\varphi = -\frac{\Delta V}{\Delta r}; \quad 400 \cdot \cos 180^\circ = -\frac{\Delta V}{0{,}05} \Rightarrow \Delta V = 20 \text{ V}$$



El punto A está a mayor potencial que el punto O, ya que el campo eléctrico tiene el sentido del potencial decreciente. Si al origen de coordenadas se le asigna un potencial eléctrico igual a cero voltios, el punto A está a un potencial de:

$$\Delta V = V_A - V_O = 20 \text{ V} \Rightarrow V_A = 20 + V_O = 20 + 0 = 20 \text{ V}$$

2. Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0; \quad \Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \frac{1}{2}\, m_e\, v_A^2 = -q_e\, \Delta V$$

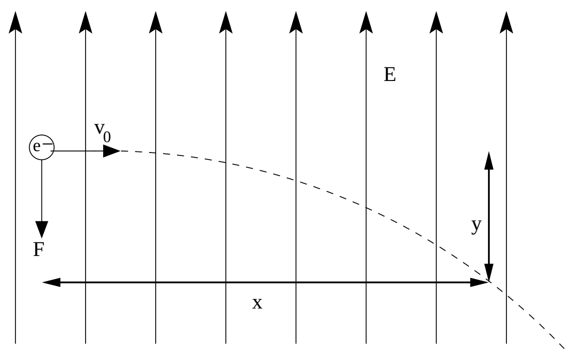
Sustituyendo:

$$\frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot v_A^2 = -(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot 20 \Rightarrow v_A = 2{,}65 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Ejercicio 11

Un electrón que lleva una velocidad de $\vec{v} = 5 \cdot 10^6\,\vec{\imath}$ m/s accede perpendicularmente a un campo eléctrico uniforme de intensidad $\vec{E} = 3000\,\vec{\jmath}$ N/C. Deduce la ecuación de la trayectoria que describe el electrón. ¿Qué distancia recorre verticalmente el electrón después de trasladarse horizontalmente 12 cm?

Solución 11



Se elige como origen del sistema de referencia el punto en el que el electrón entra en el campo eléctrico. La partícula está sometida a un movimiento horizontal con velocidad constante y a un movimiento vertical uniformemente acelerado.

Sobre el electrón actúa la fuerza eléctrica de dirección la del campo y sentido contrario al mismo, por lo que la aceleración está dirigida hacia la parte negativa del eje vertical. Aplicando la segunda ley de Newton, en módulo:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{|q|\,E}{m}$$

Eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas del movimiento del electrón, y como la aceleración tiene el sentido negativo del eje Y, se tiene que:

$$x = v_0, t$$

$$y = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{|q|\,E}{m}\,t^2$$

y despejando la coordenada y:

$$y = -\frac{|q|\,E}{2\,m\,v_0^2}\,x^2$$

Que es la ecuación de una parábola.

Para calcular la distancia recorrida verticalmente, basta sustituir en la ecuación de la trayectoria:

$$y = -\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3000}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (5 \cdot 10^6)^2} \cdot (0{,}12)^2 = -0{,}15 \text{ m}$$

Ejercicio 12

Un electrón que tiene una energía cinética de 100 eV recorre sin desviarse de su trayectoria una distancia de 10 cm en la que existe un campo eléctrico uniforme. Si la velocidad del electrón a la salida del campo eléctrico es igual a la mitad de la velocidad con la que accede al campo, calcula: la velocidad inicial del electrón, la variación que experimenta su energía cinética expresada en eV y la expresión vectorial del campo eléctrico atravesado.

Solución 12

1. La energía cinética en unidades S.I. es:

$$E_c = 100 \text{ eV} = 100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

   Aplicando la definición de energía cinética, se tiene la velocidad inicial del electrón.

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2; \quad 1{,}6 \cdot 10^{-17} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot v_0^2 \Rightarrow v_0 = 5{,}93 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

2. La velocidad final es la mitad de la inicial, por lo que la variación de su energía cinética es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = \frac{1}{2}\, m \left[\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2\right] = \frac{1}{2}\, m \left(-\frac{3}{4}\, v_0^2\right) = -\frac{3}{4}\, E_{c,inicial} = -75 \text{ eV}$$

3. Se elige un sistema de referencia con el origen en la posición inicial del electrón y el eje X coincidente con la trayectoria del mismo.

   Como el electrón se frena sin modificar su trayectoria, significa que actúa sobre él una fuerza eléctrica de sentido contrario al de su movimiento y por ello el campo eléctrico tiene la misma dirección y sentido que la velocidad inicial del electrón. Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica, se cumple:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0\ ; \quad \Delta E_c = -\Delta E_p\ ; \quad -75 = -q_e\, \Delta V$$

   Como la carga q del electrón es negativa se tiene que la diferencia de potencial entre el punto de salida y el de entrada en el campo es: $\Delta V = -75$ V.

   Como el campo eléctrico es uniforme y tiene la dirección y sentido del desplazamiento:

$$E \cdot \cos\varphi = -\frac{\Delta V}{\Delta r} = -\frac{-75}{0{,}1} = 750 \text{ V/m} \Rightarrow \vec{E} = 750\, \vec{\imath} \text{ V/m}$$

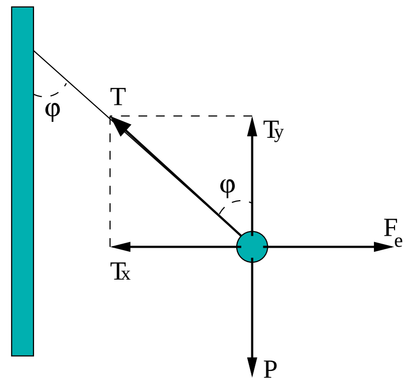
Ejercicio 13

Una esfera que tiene una masa de 0,1 g y una carga eléctrica de 0,1 μC se encuentra sujeta al extremo de un hilo de 10 cm de longitud. El otro extremo del hilo está sujeto a un punto de una placa metálica, colocada verticalmente y cargada eléctricamente, que genera un campo eléctrico uniforme de 5000 N/C. ¿Qué ángulo forma el hilo con la vertical?

Solución 13

Sobre la bolita actúan su peso, la fuerza eléctrica y la tensión del hilo. Eligiendo un sistema de referencia con el eje X como la horizontal y el eje Y la vertical y aplicando la condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F}_x = 0; \quad \vec{T}_x + \vec{F}_e = 0; \quad T_x = F_e \Rightarrow T\, \sin\varphi = |q|\, E$$



$$\sum \vec{F}_y = 0; \quad \vec{T}_y + \vec{P} = 0; \quad T_y = P \Rightarrow T\,\cos\varphi = m\,g$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\tan\varphi = \frac{|q|\,E}{m\,g} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{0{,}1\cdot 10^{-6}\cdot 5000}{0{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8} = 27^\circ$$