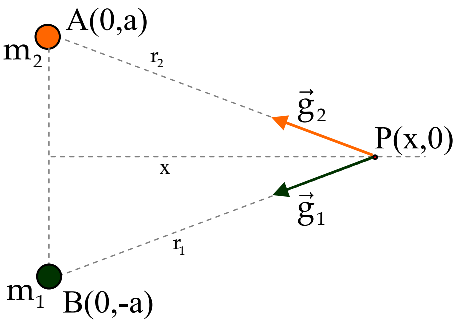
Campo Gravitatorio

1. Tenemos dos bolas de 2 kg cada una, designadas por m_1 y m_2 tal como se muestra en la figura. Halla la el campo gravitacional en el punto P

Solución:



- El campo en el punto P es la suma de los campos creados por las dos masas (principio de superposición):

$$\vec{g}_P = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \frac{Gm_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{Gm_2}{r_2^2}\vec{r}_2$$

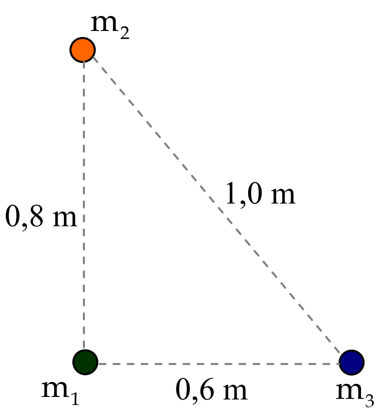
- Las distancias desde P hasta cada una de las masas vienen dadas por: $r_1 = r_2 = \sqrt{x^2 + a^2}$

- Los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son: $\vec{r}_1 = -x\vec{u}_x - a\vec{u}_y$ y $\vec{r}_2 = -x\vec{u}_x + a\vec{u}_y$

- Entonces, $\vec{g}_P = \frac{Gm_1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\vec{u}_x - a\vec{u}_y\right) + \frac{Gm_2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\vec{u}_x + a\vec{u}_y\right) =$

$$= -\frac{2Gm}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{u}_x$$

2. Tenemos tres bolas de 0,5 kg cada una, designadas por m_1, m_2 y m_3, sobre los vértices de un triángulo rectángulo, tal como se muestra en la figura. Halla la el vector fuerza gravitacional y el módulo de la fuerza que actúa sobre la bola m_1.



Solución:

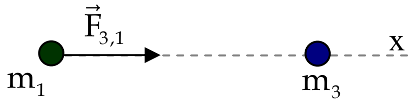
La fuerza gravitatoria total sobre m_1 es:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{2,1},$$

mientras que el módulo de esta fuerza es:

$$\left|\vec{F}_T\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_{3,1}\right|^2 + \left|\vec{F}_{2,1}\right|^2}$$

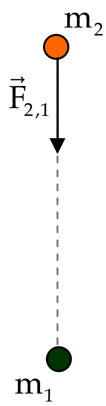
a) Cálculo de la fuerza gravitatoria $\vec{F}_T$:



- La masa m_3 crea sobre m_1 una fuerza $\vec{F}_{3,1}$ dada por: $\vec{F}_{3,1} = -\dfrac{Gm_3m_1}{r_{3,1}^2}\vec{u}_x$

  Sustituimos datos:

  $$\vec{F}_{3,1} = \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(0{,}5\text{ kg})(0{,}5\text{ kg})}{(0{,}6\text{ m})^2}\vec{u}_x = 4{,}6\cdot 10^{-11}\cdot\vec{u}_x\text{ N}$$



- La masa m_2 crea sobre m_1 una fuerza $\vec{F}_{2,1}$ dada por:

  $$\vec{F}_{2,1} = -\frac{Gm_2m_1}{r_{2,1}^2}\vec{u}_y$$

  Sustituimos datos:

  $$\vec{F}_{2,1} = -\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(0{,}5\text{ kg})(0{,}5\text{ kg})}{(0{,}8\text{ m})^2}\vec{u}_y =$$
  $$= 2{,}6\cdot 10^{-11}\cdot\vec{u}_y\text{ N}$$

- Entonces, la fuerza gravitatoria total sobre m_1 será:

  $$\vec{F}_T = \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{2,1} = \left(4{,}6\ \vec{u}_x + 2{,}6\ \vec{u}_y\right)\cdot 10^{-11}\text{ N}$$

b) Cálculo del módulo de la fuerza: $\left|\vec{F}_T\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_{3,1}\right|^2 + \left|\vec{F}_{2,1}\right|^2}$

$$\left|\vec{F}_T\right| = \sqrt{\left(4{,}6\cdot 10^{-11}\right)^2 + \left(2{,}6\cdot 10^{-11}\right)^2} = 8{,}5\cdot 10^{-11}\text{ N}$$

3. Una partícula de masa m se desplaza una pequeña distancia sobre su vertical Δy cerca de la superficie de la Tierra. Demuestra que, en esta situación, la expresión general para el cambio en la energía potencial gravitatoria viene dada por $\Delta U = mg\Delta y$.

Solución:
La variación de la energía potencial gravitatoria para llevar un cuerpo de masa m, sobre la superficie terrestre, desde A hasta B viene dada por:

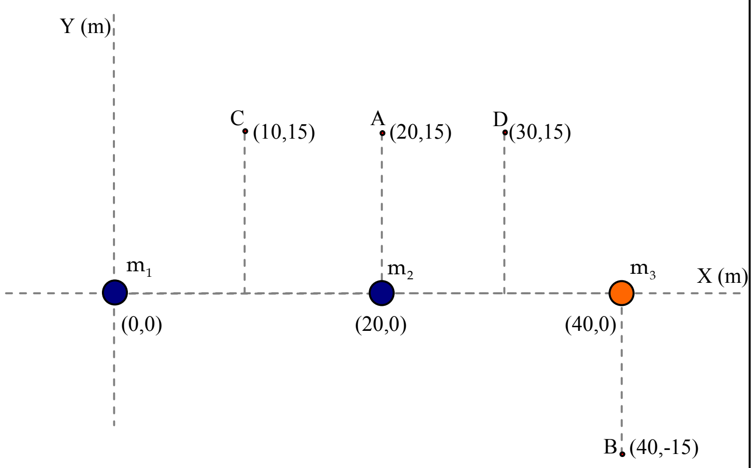
$$\Delta U = U(B) - U(A) = -W_{A\to B} = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}\cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) =$$

$$= GMm\left(\frac{r_B - r_A}{r_A r_B}\right)$$

Vamos a hacer ahora alguna aproximación a la expresión que acabamos de escribir:

- $r_B - r_A$ es Δy.
- Como r_A y r_B son cantidades muy próximas al radio de la Tierra, podemos hacer la siguiente aproximación: $r_A r_B \approx R_T^2$
- Entonces, la expresión de ΔU viene dada por: $\Delta U = GMm\left(\frac{\Delta y}{R_T^2}\right)$
- Pero $g = \frac{GM}{R_T^2}$. Así que: $\Delta U = mg\Delta y$, que es la expresión que buscamos.

4. Para el sistema de masas de la figura, en donde $m_1 = m_2 = 10$ kg y $m_3 = 50$ kg, calcula:



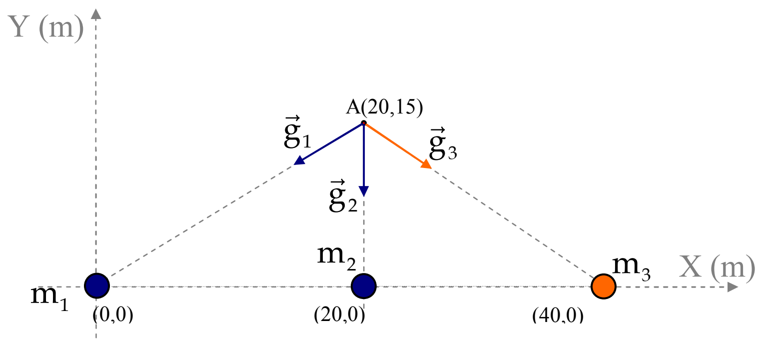
a) La intensidad del campo gravitatorio en A.

b) El potencial gravitatorio en B.

c) El trabajo necesario para llevar una masa de 100 kg desde C hasta D.

Solución:

a) Intensidad del campo gravitatorio en A:



Dibujamos el sistema de las tres masas. El vector intensidad de campo gravitatorio que actúa sobre A debido a las tres masas es la suma de las intensidades de campo gravitatorio que genera cada una de estas masas (principio de superposición):

$$\vec{g}_{tot} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = \frac{Gm_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{Gm_2}{r_2^2}\vec{r}_2 + \frac{Gm_3}{r_3^2}\vec{r}_3$$

- Campo debido a m_1:
  - La distancia entre m_1 y A es, usando Pitágoras, $r_1 = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ m
  - El vector $\vec{r}_1$ viene dado por: $\vec{r}_1 = -10\vec{u}_x - 15\vec{u}_y$.
  - Entonces: $\vec{g}_1 = \frac{Gm_1}{r_1^3}\vec{r}_1 = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{10}{25^3}\left(-10\vec{u}_x - 15\vec{u}_y\right)\frac{N}{kg}$

- Campo debido a m_2:
  - La distancia entre m_2 y A es: $r_2 = 15$ m
  - El vector $\vec{r}_2$ viene dado por: $\vec{r}_2 = -15\vec{u}_y$
  - Entonces: $\vec{g}_2 = \frac{Gm_2}{r_2^3}\vec{r}_2 = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{10}{15^3}\left(-15\vec{u}_y\right)\frac{N}{kg}$

- Campo debido a m_3:
  - La distancia entre m_3 y A es: $r_3 = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ m
  - El vector $\vec{r}_3$ viene dado por: $\vec{r}_3 = 20\vec{u}_x - 15\vec{u}_y$
  - Entonces: $\vec{g}_3 = \frac{Gm_2}{r_3^3}\vec{r}_3 = 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{10}{25^3}\left(20\vec{u}_x - 15\vec{u}_y\right)\frac{N}{kg}$

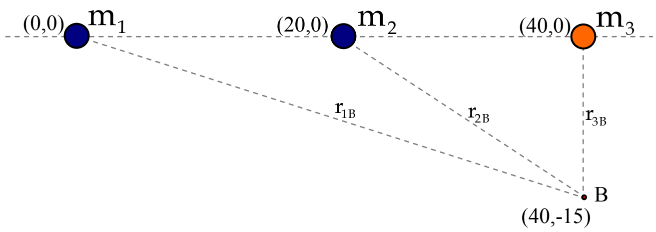
- Campo total:

$$\vec{g}_{tot} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 =$$
$$= 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{10}{25^3}\left(-10\vec{u}_x - 15\vec{u}_y\right) + 6,67 \cdot 10^{-11}\frac{10}{15^3}\left(-15\vec{u}_y\right) +$$
$$+6,67 \cdot 10^{-11}\frac{10}{25^3}\left(20\vec{u}_x - 15\vec{u}_y\right) =$$
$$= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10\left\{\frac{1}{25^3}(-10+20)\vec{u}_x + \left[\frac{1}{25^3}(-15-15) + \frac{1}{15^3}(-15)\right]\vec{u}_y\right\} =$$
$$6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10\left\{\frac{10}{25^3}\vec{u}_x + \left(\frac{10}{25^3} + \frac{1}{15^3}\right)\left(-\vec{u}_y\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{g}_A = 4,27\cdot 10^{-13}\vec{u}_x + 33,91\cdot 10^{-13}\left(-\vec{u}_y\right)\ \frac{N}{kg}$$

b) El potencial gravitatorio en B:

- El potencial gravitatorio en el punto B, V_B, está dado por la suma de los potenciales que cada una de las masas producen en B:



$$V_B = V_1 + V_2 + V_3 = -G\frac{m_1}{r_{1B}} - G\frac{m_2}{r_{2B}} - G\frac{m_3}{r_{3B}}$$

- Las distancias entre las distintas masas y B están dadas por:

$r_{1B} = \sqrt{40^2 + 15^2} = 42,42\ \text{m}$, $r_{2B} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\ \text{m}$ y $r_{3B} = 15\ \text{m}$.

- Sustituyendo los datos en $V_B = V_1 + V_2 + V_3$ obtenemos los que nos piden:

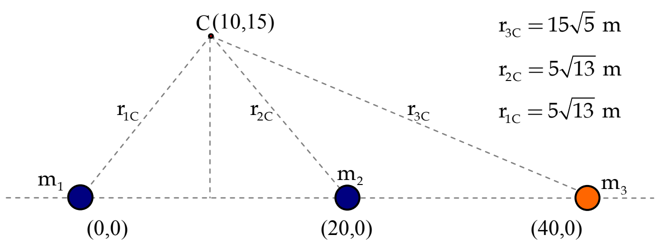
$$V_B = -G\frac{m_1}{r_{1B}} - G\frac{m_2}{r_{2B}} - G\frac{m_3}{r_{3B}} = -6,67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{42,42} + \frac{10}{25} + \frac{50}{15}\right) =$$
$$-2,65\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

c) Trabajo que hay que hacer para llevar una masa de 100 kg desde C hasta D

- El trabajo para llevar esta masa m desde C hasta D viene dado por: $W_{C\to D} = m\cdot\left(V_C - V_D\right)$.

  Calculemos los valores de V_C y de V_D

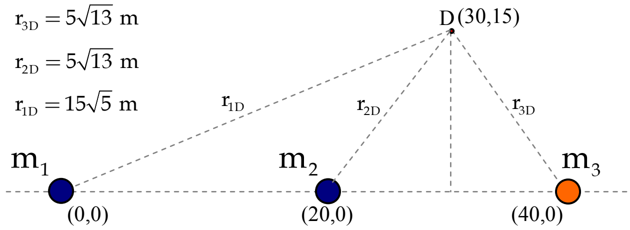
  - Cálculo de V_C:



$$V_C = -G\frac{m_1}{r_{1C}} - G\frac{m_2}{r_{2C}} - G\frac{m_3}{r_{3C}} = -6,67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{5\sqrt{13}} + \frac{10}{5\sqrt{13}} + \frac{50}{15\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_C = -1,73\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

- Cálculo de V_D:



$$V_D = -G\frac{m_1}{r_{1D}} - G\frac{m_2}{r_{2D}} - G\frac{m_3}{r_{3D}} = -6,67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{15\sqrt{5}} + \frac{10}{5\sqrt{13}} + \frac{50}{5\sqrt{13}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_D = -2,42\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{kg}$$

- Cálculo de $W_{C\to D}$:

Simplemente sustituimos los datos dados y los resultados obtenidos en $W_{C\to D} = m\cdot(V_C - V_D)$:

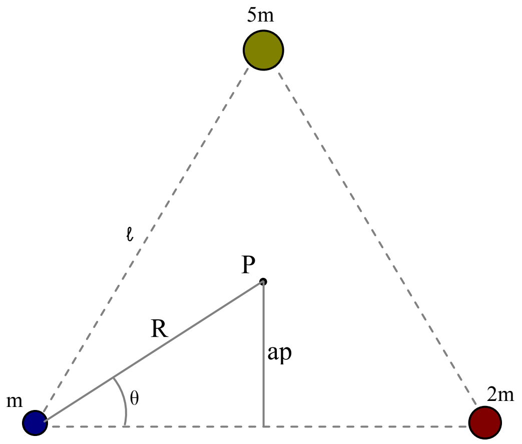
$$W_{C\to D} = m\cdot(V_C - V_D) = 100\cdot\left[-1,73\cdot 10^{-10} - \left(-2,42\cdot 10^{-10}\right)\right] = 0,67\cdot 10^{-8}\ J$$

5. En los vértices de un triángulo equilátero de longitud ℓ se sitúan masas de valores m, 2m y 5m. Calcular el campo y el potencial en el centro del triángulo. (Consideramos unidades en el S.I)

Solución:

a) Discusión geométrica previa:

Hacemos un esquema de la figura. Necesitamos conocer la distancia desde P hasta cada uno de los vértices. Para ello hallaremos previamente la apotema, ap, y luego, mediante el teorema de Pitágoras, deduciremos R.



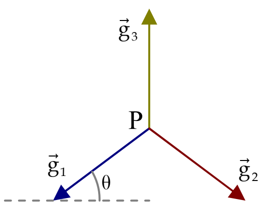
El área del triángulo vendrá dada por: $A=\frac{3\cdot 1\cdot ap}{2}$ y también por $A=\frac{1\cdot h}{2}$, en donde la altura h se halla fácilmente usando el teorema de Pitágoras: $h=\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}$. Igualando las dos expresiones del área obtenemos la apotema:

$$\frac{3\cdot 1\cdot ap}{2}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 1}{2}}{2}\Rightarrow ap=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ya estamos preparados para hallar R. Aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras al triángulo de hipotenusa R y catetos ap y $\ell/2$:

$$R=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Cálculo del campo gravitatorio en P:



El vector intensidad de campo en el punto P, $\vec{g}_p$, está dado por:

$$\vec{g}_p=\vec{g}_1+\vec{g}_2+\vec{g}_3$$

El campo creado por cada masa lo escribiremos como suma de las componentes horizontal y vertical:

$$\vec{g}_p=\vec{g}_{1,x}+\vec{g}_{1,y}+\vec{g}_{2,x}+\vec{g}_{2,y}+\vec{g}_{3,x}+\vec{g}_{3,y}=$$

$$=-|\vec{g}_1|\cos\theta\ \vec{i}-|\vec{g}_1|\operatorname{sen}\theta\ \vec{j}+|\vec{g}_2|\cos\theta\ \vec{i}-|\vec{g}_2|\operatorname{sen}\theta\ \vec{j}+|\vec{g}_3|\ \vec{j}\ \text{expresado en}\ \frac{N}{kg}$$

Pero $|\vec{g}_1|$, $|\vec{g}_2|$ y $|\vec{g}_3|$ están dados por:

$$|\vec{g}_1|=G\frac{m}{R^2}=G\frac{m}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=G\frac{3m}{1^2},\ \text{expresado en}\ \frac{N}{kg}$$

$$|\vec{g}_2| = G\frac{2m}{R^2} = G\frac{2m}{\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} = G\frac{6m}{l^2}\ \frac{N}{kg}$$

$$|\vec{g}_1| = G\frac{5m}{R^2} = G\frac{5m}{\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2} = G\frac{15m}{l^2}\ \frac{N}{kg}$$

Teniendo en cuenta que $\theta = 30^o$, podemos escribir:

$$\vec{g}_p = -G\frac{3m}{l^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vec{i} - G\frac{3m}{l^2}\frac{1}{2}\ \vec{j} + G\frac{6m}{l^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vec{i} - G\frac{6m}{l^2}\frac{1}{2}\ \vec{j} + G\frac{15m}{l^2}\ \vec{j}$$

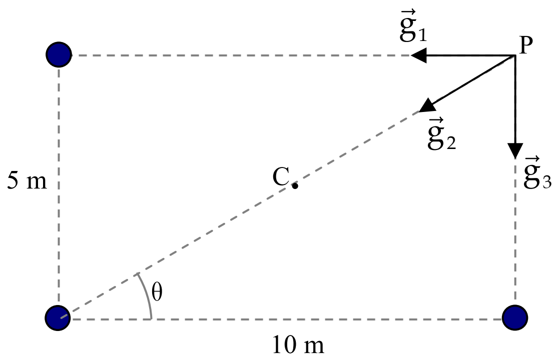
Reagrupamos componentes y simplificamos:

$$\vec{g}_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}G\frac{m}{l^2}\ \vec{i} + \frac{21}{2}G\frac{m}{l^2}\ \vec{j}, \text{ expresado en } \frac{N}{kg}$$

c) Cálculo el potencial en el centro del triángulo:

$$V_p = V_1 + V_2 + V_3 = -G\frac{m}{R} - G\frac{2m}{R} - G\frac{5m}{R} =$$
$$= -\sqrt{3}G\frac{m}{l} - 2\sqrt{3}G\frac{m}{l} - 5\sqrt{3}G\frac{m}{l} = -8\sqrt{3}G\frac{m}{l}, \text{ expresado en } \frac{J}{kg}$$

6. En tres de las cuatro esquinas de un rectángulo de 10 m de largo y 5 de ancho, se encuentran situadas 3 masas iguales de 10 kg cada una. Calcula:
   a) El vector intensidad de campo gravitatorio en la esquina libre.
   b) El potencial en dicho punto.
   c) El trabajo necesario para trasladar una masa de 5 kg desde esa esquina hasta el centro del rectángulo



Solución:

a) El campo en P, $\vec{g}_p$, viene dado por:

$$\vec{g}_p = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

en donde $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ y $\vec{g}_3$ se pueden expresar como sigue:

$$\vec{g}_1 = G\frac{m}{r_1^3}\,\vec{r}_1 = G\frac{10}{10^3}\,10\left(-\vec{i}\right) = -\frac{1}{10}G\,\vec{i}\,\frac{N}{kg},$$

$$\vec{g}_2 = G\frac{m}{r_2^3}\,\vec{r}_2 = G\frac{10}{\sqrt{125}^3}\,\left[10\left(-\vec{i}\right)+5\left(-\vec{j}\right)\right] = \left(-0,07G\,\vec{i}-0,036G\,\vec{j}\right)\,\frac{N}{kg},$$

$$\vec{g}_3 = G\frac{m}{r_3^3}\,\vec{r}_3 = G\frac{10}{5^3}\,5\left(-\vec{j}\right) = -\frac{2}{5}G\,\vec{j}\,\frac{N}{kg}.$$

Entonces:

$$\vec{g}_p = \vec{g}_1+\vec{g}_2+\vec{g}_3 = \left(-\frac{1}{10}G-0,07\right)G\,\vec{i}+\left(-0,036G-\frac{2}{5}G\right)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{g}_p = \left(-0,17\,\vec{i}-0,44\,\vec{j}\right)\,\frac{N}{kg}$$

b) El potencial en P está dado por :

$$V_p = V_1+V_2+V_3 = -G\frac{m}{r_1}-G\frac{m}{r_2}-G\frac{m}{r_3} = -10G\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{\sqrt{125}}+\frac{1}{5}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = -3,89G\,\frac{J}{kg}$$

c) El potencial en C está dado por :

$$V_c = V_{1,p}+V_{2,p}+V_{3,p} = -G\frac{m}{r_{1,p}}-G\frac{m}{r_{2,p}}-G\frac{m}{r_{3,p}}$$

$$V_c = -10G\left(\frac{2}{\sqrt{125}}+\frac{2}{\sqrt{125}}+\frac{2}{\sqrt{125}}\right)\Rightarrow V_c = -5,37G\,\frac{J}{kg}$$

d) Trabajo para llevar una masa de 5 kg desde P hasta C:

$$W_{P\to C} = -m\left(V_C-V_P\right) = -5\left[-5,37G-\left(-3,89G\right)\right] = -7,4G\text{ J}$$

*****