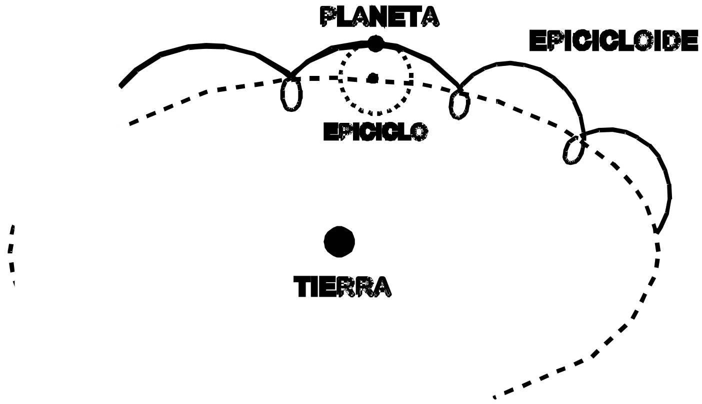
CAMPO GRAVITATORIO

1 INTRODUCCIÓN.

Uno de los problemas fundamentales que ha intrigado al hombre desde los albores de la civilización ha sido el movimiento de los cuerpos celestes, o como decimos hoy, el movimiento planetario. Los griegos que consideraban al hombre como el centro del Universo, supusieron que la Tierra era el centro geométrico del Universo y que los cuerpos celestes se movían alrededor de ella. La primera hipótesis relacionada con el movimiento planetario consistió en suponer que los planetas describían círculos concéntricos con la Tierra. Esta suposición,sin embargo, no explicaba el movimiento observado de estos cuerpos con respecto a la Tierra.



En el siglo II, Ptolomeo de Alejandría desarrolló la teoría de los EPICICLOIDES para explicar el movimiento planetario. Suponía que el planeta describía, con movimiento uniforme, un círculo (EPICICLO), cuyo centro a vez, se desplazaba en un círculo mayor, concéntrico con la Tierra, llamado DEFERENTE. La trayectoria resultante del planeta es así una EPICICLOIDE.

Esta descripción fue aceptada hasta el siglo XVI, en que el monje polaco Nicolás Copérnico, propuso describir el movimiento de todos los planetas con respecto al Sol, el cual estaría en el centro. (esta idea ya había sido propuesta en el s. III a.C. por el astrónomo griego Aristarco. El Sol, el cuerpo mas grande de nuestro sistema planetario, coincide prácticamente con el centro de masas del sistema y se mueve más lentamente que los otros planetas. Esto justifica el haberlo elegido como centro de referencia, ya que prácticamente un sistema inercial. Las ideas de Copérnico y el análisis cuidadoso de las mediciones realizadas por Ticho Brache llevaron a Johanes Kepler al descubrimiento de las leyes del movimiento del sistema planetario. Estas leyes, denominadas leyes de Kepler, son una descripción cinemática del movimiento planetario. Fue Newton el primero que intentó explicar dinámicamente el movimiento de los planetas. La ley de la

Gravitación Universal, junto con las tres leyes de la Dinámica, fue formulada por Newton en su libro "Principios matemáticos de filosofía natural", publicado en Londres en 1.687.

2 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL. LEYES DE KEPLER.

"Dos masas puntuales se atraen entre sí con una fuerza que es directamente proporcional al producto de dichas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa"

$$\vec{F} = -G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_r$$

donde u_r es un vector unitario en la dirección de la recta que une las masas y G es la constante de gravitación universal.

El valor de G coincide numéricamente con la fuerza de atracción entre dos masas puntuales de 1 Kg separadas una distancia de 1 metro y fue determinado por vez primera por Cavendish en 1.798 utilizando una balanza de torsión. $G = 6.67.10^{-11}$ $N.m^2.Kg^{-2}$

El pequeño valor de G explica por qué las fuerzas gravitatorias solamente son perceptibles cuando una de las masas es muy grande, como es el caso de los planetas.

Algunas precisiones que conviene tener en cuenta con respecto a la ley de la gravitación son:

1. Se ha deducido para masas puntuales y evidentemente los planetas no lo son. Pero se pueden considerar como tales ya que sus radios, considerados esferas perfectas, son pequeños frente a las distancias que los separan.
2. Consideremos un planeta y un pequeño cuerpo cercano a su superficie. En este caso no puede ignorarse el radio del planeta a la hora de definir la distancia planeta-cuerpo. Tomamos como tal la distancia entre los centros de masas de ambos, lo que equivale a suponer que, a efectos gravitatorios, los planetas y los demás cuerpos se comportan como si toda su masa se encontrase concentrada en los respectivos centros de masas.
3. El movimiento de dos masas bajo la mutua acción gravitatoria ha de ser descrito por un observador inercial. Este observador podría ser uno situado en el CM del sistema. En el caso de que una de las masas sea muy superior a la otra, el CM del sistema estará muy desplazado hacia la mayor y en primera aproximación podemos suponer que coincide con el de ésta. Este punto de vista es el adoptamos en la mayoría de los problemas que abordamos. Al estudiar el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado, las oscilaciones de un péndulo,... lo hacemos como un observador inercial ligado a la Tierra. Cuando estudiamos el movimiento de la Tierra o de cualquier planeta, lo hacemos desde un SR centrado en el Sol, por ser éste, el cuerpo de mayor masa.

Las ideas de Copérnico y el análisis cuidadoso de las mediciones realizadas por Ticho Brache llevaron a Johanes Kepler al descubrimiento de las leyes del movimiento del sistema planetario. Estas leyes, denominadas leyes de Kepler, son una descripción cinemática del movimiento planetario.

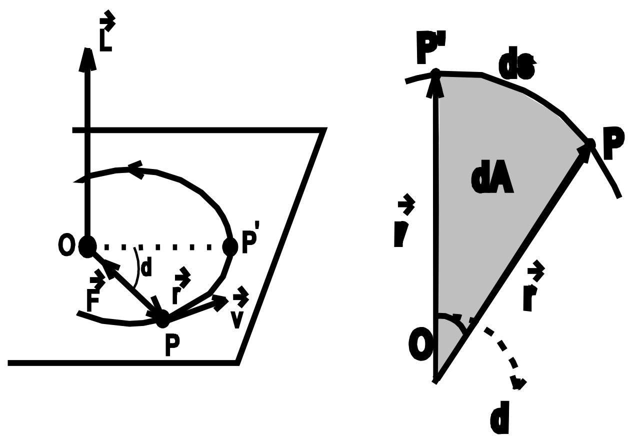
1ª LEY " Todos los planetas describen órbitas elípticas alrededor del sol, encontrándose éste en uno de los focos de la elipse"

2ª LEY " El vector de posición de cualquier planeta con respecto al Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir: la velocidad areolar de un planeta en torno al Sol es contante. (LEY DE LAS ÁREAS)"

3ª LEY " El cuadrado del período de revolución de un planeta en torno al Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita"

$$\frac{T^2}{a^3} = k \qquad \frac{T^2}{r^3} = k$$

Vamos a tratar de explicar estas leyes utilizando la Ley de la Gravitación Universal y recordando las fuerzas centrales y la constancia del momento angular.



Una fuerza es central cuando su dirección pasa siempre por un punto fijo de referencia y por tanto su dirección coincide en todo momento son su vector de posición. Evidentemente las fuerzas gravitatorias lo son.

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\,L}{dt} = 0 \quad : \quad \vec{L} = cte$$

Newton fue el primero en demostrar que bajo la acción de una fuerza central cuya intensidad varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la trayectoria del cuerpo debe ser una elipse.

De la constancia del momento angular se deduce:

1. Al ser $L = r \times m v$ constante en dirección, r y v están en el mismo plano. En consecuencia la trayectoria de una partícula sometida a fuerzas centrales es PLANA.
2. Al ser constante el sentido de L, también lo es el del giro de la partícula.
3. De la constancia del módulo de L, se deduce la 2ª ley de Kepler:
   En un tiempo dt el radio vector r, barre un área dA, cuyo valor es prácticamente igual a la del triángulo OPP', de base $\overline{P'P} = r.d\,\theta$ y altura r.

$$\left.\begin{array}{r} d\,A = \frac{1}{2}\overline{P'P}.r = \frac{1}{2} r.d\,\theta.r = \frac{1}{2}.r^2.d\theta \\ L = r.m\,v.sen\,90 = r.m.\frac{d\,s}{d\,t} = r.m.\frac{r.d\,\theta}{d\,t} = m.r^2.\frac{d\,\theta}{dt} \end{array}\right\} L = 2\,m\frac{d\,A}{d\,t}$$

y al ser L y m constantes: $\frac{d\,A}{d\,t} = \frac{L}{2\,m} = cte$

Para demostrar la 3ª ley supondremos órbitas circulares:

$$\left.\begin{array}{c} F_G = F_c \\ G\frac{M.m}{r^2} = m.\frac{v^2}{r} = m.\frac{4\,\pi^2}{T^2}.r \end{array}\right\} \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} \;:\; \frac{T^2}{r^3} = k$$

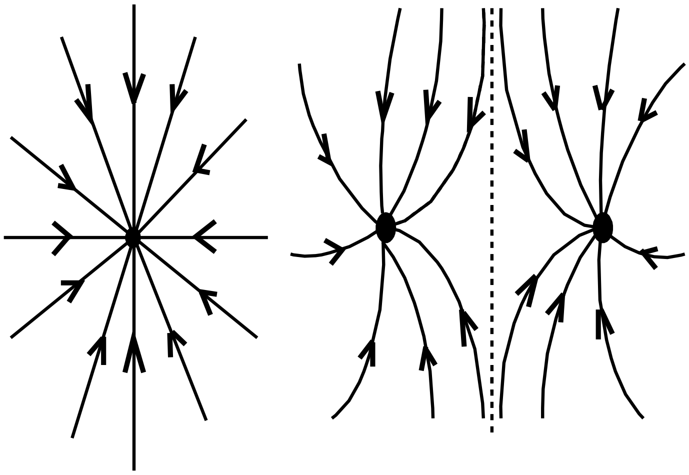
3 INTENSIDAD Y LÍNEAS DE FUERZA DEL CAMPO GRAVITATORIO.

El vector intensidad de campo gravitatorio o simplemente campo gravitatorio en un punto se define como la fuerza que actúa sobre la unidad de masa colocada en ese punto.

$$\vec{g} = \frac{F}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

El vector campo g, está siempre dirigido hacia la masa que crea el campo, M, pues tiene sentido contrario a u_r, siendo por tanto un campo vectorial y central y como todos los campo centrales será también conservativo.

Gráficamente podemos representar el campo gravitatorio mediante las líneas de fuerza, que cumplen las siguientes propiedades:



1. Indican la trayectoria que seguiría una masa abandonada a la acción del campo.
2. Son tangentes en todo punto al vector campo.
3. El nº de líneas, por unidad de área perpendicular a las mismas, es proporcional a la intensidad del campo.
4. No se pueden cortar, ya que en ese punto, el vector campo tendría dos direcciones, lo cual es imposible.

Cuando el campo gravitatorio es creado por varias masas:

$$g = g_1 + g_2 + g_3 + ... = \sum g_i$$

Esto equivale a admitir que el campo creado por cada partícula no se perturba por la presencia de las demás. Es lo que se llama principio de superposición de campos.

Recordando el tema general de campos, el concepto de intensidad de campo se introducía para poder asignar a cada punto del espacio un valor de dicho campo que fuese independiente de la masa de prueba, m, que colocamos en dicho punto. En la ecuación de g observamos que éste depende exclusivamente de la masa creadora del campo y del punto considerado. De esta manera el vector campo gravitatorio es una propiedad de cada punto del espacio que rodea a M.

Variaciones de g con pequeñas alturas.

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} \qquad g = G\frac{M}{r^2}$$

Tomando logaritmos en ambos miembros de la última expresión:

$$Lg = LG + LM - 2Lr$$

Derivando:

$$\frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r}$$

$$\frac{g - g_0}{g_0} = -2\frac{r - R}{R}$$

de donde: $$g = g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Variaciones de g con grandes alturas.

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

dividiendo miembro a miembro ambas expresiones:

$$\frac{g_0}{g} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \frac{R^2 + 2Rh + h^2}{R^2} = 1 + 2h/R + (h/R)^2$$

y despejando se obtiene:

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

4 ENERGÍA Y POTENCIAL DEL C.G.. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES.

Como la fuerza gravitatoria es central y newtoniana, es conservativa.
Por tanto $W_{AB} = -\Delta E_p$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}_r.d\vec{r} = G\,M\,m\int_A^B \frac{d\,r}{r^2}$$

$$W_{AB} = -G\,M\,m\left(-\frac{1}{r}\right)_A^B = G\,M\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\Delta E_p = E_{p_B} - E_{p_A} = -W_{AB} = -G\,M\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$E_{p_r} - E_{p_\infty} = -G\,M\,m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) \quad : \quad U_r = -G\frac{M\,m}{r}$$

Donde hemos eligiendo como origen de la energía potencial el infinito. El signo negativo nos indica que la Ep es siempre negativa y disminuye a medida que m se acerca a la Tierra. Como la Ep se va perdiendo en ese acercamiento, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es positivo.

La Ep de un masa m en un punto determinado se puede definir como el trabajo realizado para trasladar la masa m desde el infinito hasta dicho punto.

Evidentemente:

$$\vec{F}.d\vec{r} = -d\,U \quad , \quad \vec{F} = -\frac{d\,U}{d\vec{r}} = -\vec{grad}\,U$$

Para posiciones próximas a la Tierra se suele tomar como nivel de referencia la superficie terrestre, $U(R_T) = 0$.

$$U^*(h) = U(h) - U(R_T) = -G\frac{M_T\,m}{R_T + h} - \left(-G\frac{M_T\,m}{R_T}\right) = -G\,M_T\,m\left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$= -G\,M_T\,m\left(\frac{R_T - R_T - h}{(R_T + h)\,R_T}\right) = G\frac{M_T}{R_T^2}\left(\frac{m\,h}{1 + \frac{h}{R_T}}\right) = m.g.h$$

$$donde \quad 1 + \frac{h}{R_T} \approx 1 \quad ya\ que \quad h \ll R_T$$

Se define el potencial en un punto como la energía potencial de la unidad de masa colocada en dicho punto:

$$V = \frac{U}{m} = -G\frac{M}{r}$$

Para cada punto del espacio que rodea a M hay un número asociado, el potencial V, que no depende de la masa que allí se coloque. Tenemos pues definido un campo escalar de potenciales.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{m} = -\frac{W_{AB}}{m} \qquad W_{AB} = m(V_A - V_B)$$

$$W_{AB} = \vec{F}.d\vec{r} = -dU = -m\,dV \ , \ \frac{F}{m} = -\frac{dV}{d\vec{r}} \quad \_ \quad \vec{g} = -\vec{grad}V$$

Para el potencial gravitatorio también se admite el principio de superposición:

$$V_T = V_1 + V_2 + ... = \sum V_i$$

Recordemos: $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r \quad y \quad V = -G\frac{M}{r}$

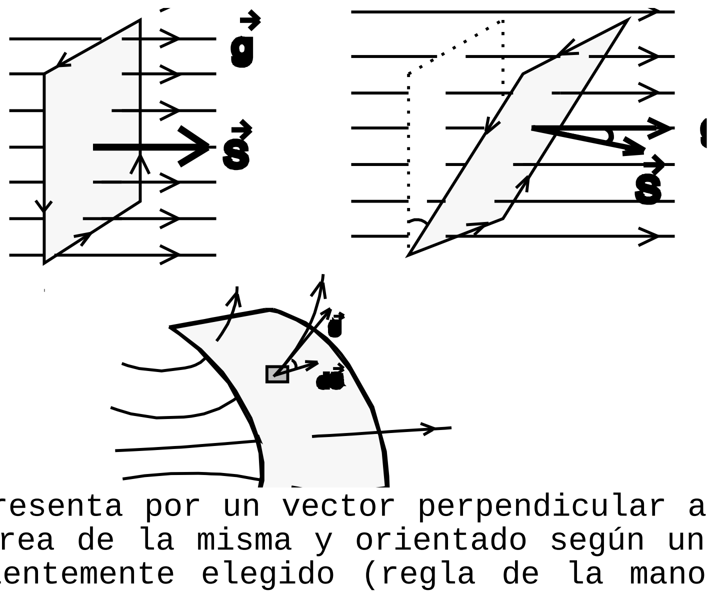
Si derivamos V respecto r:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2} \qquad -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = -\left(\frac{GM}{r^2}\right)\vec{u}_r \quad \_ \quad -\vec{grad}\ V = \vec{g}$$

Recordemos lo visto sobre las SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES en el tema anterior. Se definen como el lugar geométrico de los puntos que tienen el mismo potencial y cumplían las siguientes propiedades:

1. El trabajo necesario para mover una masa de un punto a otro de una superficie equipotencial es nulo.
2. No se pueden cortar.
3. Se representan más juntas a medida que la intensidad del campo es mayor.
4. Son perpendiculares a las líneas de fuerza.

5 FLUJO DEL C.G. TEOREMA DE GAUSS.



Una superficie plana se representa por un vector perpendicular a ella, de módulo el valor del área de la misma y orientado según un sentido de circulación convenientemente elegido (regla de la mano derecha). En el caso de que no sea plana, se descompone en elementos de superficie lo suficientemente pequeños para considerarlos planos (elementos de superficie: dS). Cuando la superficie es curva, se suele tomar el sentido positivo del vector superficie hacia el exterior, la parte convexa.

Supongamos que en una región del espacio existe un campo uniforme g, tal como se aprecia en la primera figura. Una superficie S, rectangular y perpendicular a las líneas de fuerzas, será atravesada por cierto número de estas. Puesto que el campo es proporcional a la "densidad de líneas de fuerza", el producto del campo por la superficie resulta ser un índice del número de líneas de fuerza que atraviesan dicha superficie.

A ese índice se le denomina flujo del campo a través de S

$$\Phi = g.S$$

Si la superficie no es perpendicular al campo, sino que forma cierto ángulo con él, el número de líneas de fuerza que la atravesarán es el mismo que atravesarían una superficie perpendicular de valor $S.\cos\alpha$. Por tanto

$$\Phi = E.S.\cos\alpha$$

Por tanto podemos generalizar la definición de flujo como el producto escalar del vector campo por el vector superficie:

$$\Phi = \vec{g}.d\vec{S}$$

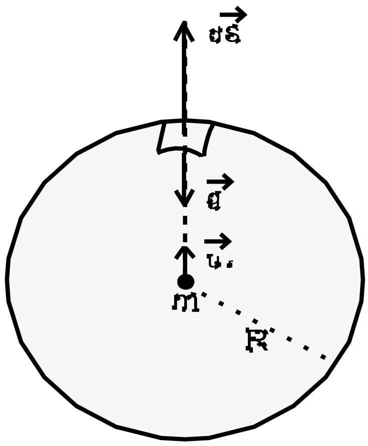
Si se trata de una superficie cualquiera y de un campo variable, podemos dividir la superficie en elementos de campo infinitesimales, calculando el flujo para cada uno de ellos y sumando después para todos:

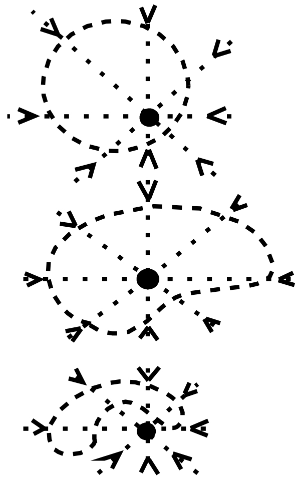
$$d\Phi_i = \vec{g}_i.d\vec{S}_i \quad \_ \quad \Phi = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i.d\vec{S}_i \quad \_ \quad \Phi = \int_S \vec{g}.d\vec{S}$$

El concepto de flujo mantiene en todos los casos su significado, ya que se trata de una cantidad que es proporcional al número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie.

Si consideramos una superficie cerrada, como el sentido del vector superficie lo hemos considerado positivo hacia afuera, el flujo a través de ella será positivo cuando las líneas de fuerza salgan de la superficie y negativo cuando entren. El flujo total a través de una superficie cerrada es el flujo neto, que resulta al considerar las líneas que entran y las que salen.

6 TEOREMA DE GAUSS.





Calculemos el flujo creado, a través de una superficie esférica cerrada, por el campo gravitatorio de una puntual, que se encuentra en el centro de la superficie.

$$\Phi = \int_S \vec{g}.d\,\vec{S} = \int_S -\frac{G\,m}{r^2}\,\vec{u}_r\,.d\,\vec{S}$$

$$\Phi = -\frac{G\,m}{r^2}\int_S \text{¿}\,d\,S = -4\,\pi\,G\,m$$
$$\text{¿}$$

El flujo es negativo porque todas las líneas de fuerza son entrantes. Los vectores $\vec{g}\ y\ d\,\{\vec{S}\text{¿}$ tienen sentidos opuestos en todos los puntos de la superficie cerrada. El resultado anterior no se modifica si m no está en el centro, siempre que se mantenga en el interior, ni aunque la superficie no sea esférica, siempre que se mantenga cerrada y m en su interior.

Si m es exterior el flujo originado es nulo. Toda línea cortará a S en dos puntos, al entrar originará flujo negativo y al salir el mismo pero positivo.

Por tanto para calcular el flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada podemos hacerlo mediante la ecuación anterior sin más que determinar previamente la masa total interior a la superficie y sin preocuparnos de la que pueda existir fuera.

$$\Phi = -4\,\pi\,G\sum_{i=1}^{n}\text{¿}\,m_i$$
$$\text{¿}$$

donde m_i son las masa puntuales interiores a la superficie. Este resultado se conoce como Teorema de Gauss aplicado al campo gravitatorio y podría enunciarse así:

" El flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada es proporcional a la masa encerrada dentro de la superficie, siendo $-4\,\pi\,G$ *la constante universal de proporcionalidad."*

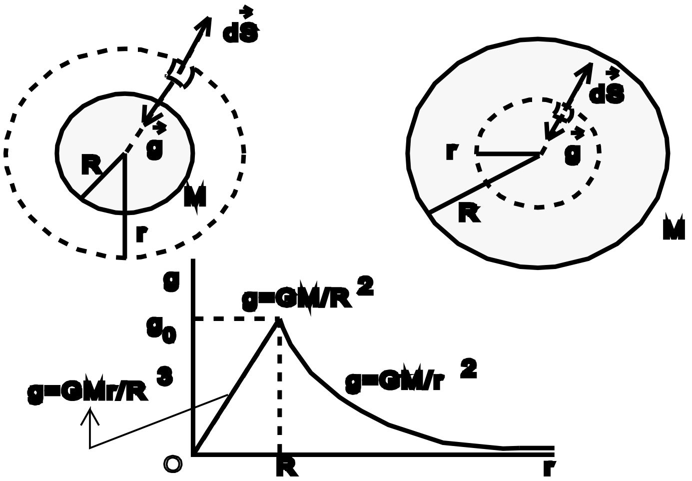
Si en lugar de una sola masa tenemos n masas encerradas en la superficie S, el flujo total será la suma de los flujos parciales:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots = -4\pi\, G \sum_{i=1}^{n} \text{¿} m_i = -4\,\pi\, G\, m_T$$

¿

Como aplicaciones del teorema de Gauss vamos a calcular el campo creado por una masa esférica en un punto exterior a ella y en un punto interior.

Para ello imaginemos una superficie gaussiana de radio r > R y r < R respectivamente, siendo R el radio de la masa esférica.



Dada la simetría del problema, el módulo de $\vec{g}$ es constante en todos los puntos de la superficie gaussiana.

$$\Phi = \int_s \text{¿} \vec{g}.d\,\{\vec{S} = -g \int_S \text{¿} dS = -g\,S = -4\,\pi r^2\, g$$

¿

Según el teorema de Gauss:

$$\Phi = -4\,\pi\,G\,M$$

igualando ambas ecuaciones:

$$g = G\,\frac{M}{r^2}$$

Donde M es la masa interior a la superficie gaussiana. Si r>R es toda la masa y si r<R es sólo la que hay dentro de S.

Este resultado justifica que, a efectos gravitatorios, los planetas crean en el espacio exterior un campo gravitatorio equivalente al que crearía una partícula de igual masa situada en el C.M. del planeta.

Si consideramos un planeta esférico y densidad constante, la masa interior se puede poner en función de la masa total:

$$\rho = \frac{M_{TOTAL}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_{interior}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \qquad M_{INT.} = M_T \frac{R^3}{r^3}$$

y por tanto: $$g = G \frac{M_T}{R^3} r$$

La ecuación anterior nos dice que en los puntos del interior del planeta la intensidad del campo gravitatorio varía linealmente con la distancia al centro. El la última figura vienen representadas las variaciones de g frente a la distancia al centro. Evidentemente para r=R, las ecuaciones anteriores dan el mismo valor de g.

APÉNDICE I. MASA INERCIAL Y MASA GRAVITATORIA.

Si aplicamos una misma fuerza a cuerpos diferentes, cuanto mayor sea la masa del cuerpo mayor será la aceleración que produce. La masa proporciona una idea cuantitativa de la inercia de los cuerpos. Es por ello por lo que recibe el nombre de masa inercial.

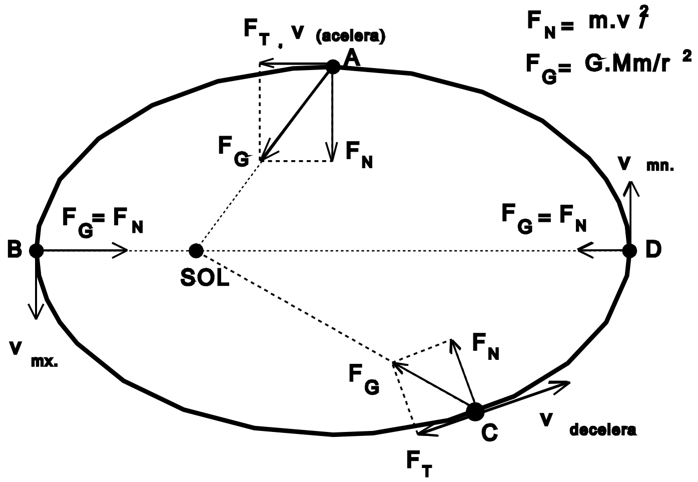
$$m_1 . a_1 = m_2 . a_2 \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \qquad m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}$$

Si tomamos como patrón una de las masas (m_1) podemos calcular la masa del otro cuerpo, aplicando sobre ambos la misma fuerza y comparando las aceleraciones. La masa patrón es el Kilogramo.

En ocasiones se define la masa refiriéndola al peso de los cuerpos en la superficie terrestre. Comparando en una balanza el peso de dos cuerpos, podemos encontrar la relación que existe entre sus masas.

A partir de una masa patrón, podemos establecer el valor de otras masas. A la masa así obtenida se denomina masa gravitatoria y que coincide en magnitud con la masa inercial antes definida.

APÉNDICE II. MOVIMIENTO GENERAL EN EL ESPACIO: PLANETAS Y SATÉLITES.



Sea un planeta describiendo una órbita elíptica alrededor del Sol. En un punto como el A, la fuerza atractiva la podemos considerar descompuesta en dos: la primera F_N, normal a la curva, que origina una a_c sobre el planeta, y la segunda F_T, tangencial, que imprime una a_t al planeta que incrementa su velocidad. Al alcanzar el perihelio (B): $F_T = 0$ y $F_N = F_G$. En el punto C la F_T tiene sentido contrario a la velocidad, originando sobre el planeta una aceleración negativa que lo va frenando hasta que llega al afelio (D), en que nuevamente: $F_T = 0$ y $F_N = F_G$. Por lo tanto la velocidad del planeta será máxima en B y mínima en D, lo cual está de acuerdo con la ley de las áreas. Únicamente en el perihelio y en el afelio $F_N = F_G$.

Como caso particular de las órbitas elípticas están las circulares, en éstas se cumple en cualquiera de sus puntos que $F_N = F_G$.

$$\frac{m\,v^2}{r} = G\,\frac{M\,m}{r^2} \qquad E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,G\,\frac{Mm}{r}$$

Por tanto la energía total, constante, del cuerpo que describa una órbita circular será:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,G\,\frac{M\,m}{r} - G\,\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}\,G\,\frac{Mm}{r}$$

energía que resulta negativa por tratarse de la energía de un cuerpo que se mueve ligado a otro y que precisa recibir energía para liberarse de la acción de éste.

De forma general, como la Ec es siempre positiva y la Ep siempre negativa, la energía mecánica total puede ser positiva, negativa o cero.

- Si la E_T < 0 tenemos órbitas cerradas (circunferencias y elipses). El objeto de masa m queda ligado al de masa M. Caso de los planetas, satélites y cometas como el Halley, que visita periódicamente las cercanías del Sol.
- Si la E_T ¿ 0 tenemos órbitas abiertas (parábola(E_T=0) e hipérbola(E_T>0)), como los cometas que visitan el sistema solar y no regresan.

Supongamos ahora que desde una cierta altura (h) sobre la superficie terrestre lanzamos un objeto con una velocidad v. Su energía mecánica total:

$$E_T = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{R_T + h}$$

El que esta energía sea negativa(órbita cerrada), positiva o nula (órbita abierta) dependerá del valor de v. Este valor se denomina velocidad de escape. Haciendo h=0 y E=0 obtendremos el valor de la velocidad de escape desde un punto de la superficie de la Tierra.

$$v = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$$

Esta velocidad de escape también se puede obtener, calculando la energía necesaria para trasladar el peso del cuerpo desde R_T (o r si no está en la superficie de la Tierra) hasta el infinito, energía que habrá que comunicársela en el disparo, en forma de energía cinética.

$$\int_{R_T}^{\infty} ¿ m g \, d r = \int_{R_T}^{\infty} ¿ m g_0 \frac{R_T^{\ 2}}{r^2} d r = m g_0 R_T^2 \left[- \frac{1}{r} \right]_{R_T}^{\infty} = m g_0 R_T$$

$$W = ¿$$
$$¿$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g_0 R_T = m \frac{G M}{R_T^2} R_T \qquad v = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$$

Si en vez de lanzar el cuerpo desde R_T lo hacemos desde un punto cualquiera (r), cambiando los límites de integración obtendríamos:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g_0 r = m \frac{G M}{R_T^2} r \qquad v = \sqrt{\frac{2 G M}{r}}$$

Por tanto si logramos dotar al cuerpo de la correspondiente velocidad de escape, éste se moverá sobre una parábola, alejándose indefinidamente y desligándose de la Tierra. Si v es mayor que la velocidad de escape el efecto será el mismo pero la trayectoria seguida será una hipérbola y si v es menor, la órbita será cerrada y el cuerpo queda ligado a la Tierra describiendo órbitas circulares o elípticas.