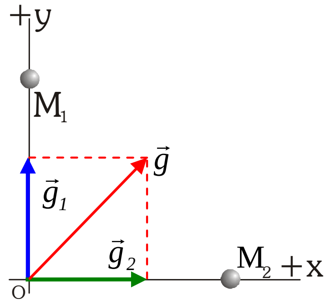
PROBLEMAS Y CUESTIONES SOBRE EL TEMA 2: CAMPO GRAVITATORIO.

3. Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2)m y (2,0) m. Calcular:
a) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen.
b) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.

a)



Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P}$

El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 5\ kg$; $\vec{r}_1 = (0{,}0) - (0{,}2) = (0{,}-2)m = -2\vec{j}\ m$;

$$r_1 = 2\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-2\vec{j}m}{2m} = -\vec{j}$$

$$\vec{g}_{1P} = -\frac{GM_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2^2} \cdot (-\vec{j}) \quad N/kg = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N/kg$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en (0,0):

$M_1 = 5\ kg$; $\vec{r}_1 = (0{,}0) - (2{,}0) = (-2{,}0)m = -2\vec{i}\ m$;

$$r_1 = 2\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{-2\vec{i}\ m}{2\ m} = -\vec{i}$$

$$\vec{g}_{1P} = -\frac{GM_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2^2} \cdot (-\vec{i}) \quad N/kg = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i}\ N/kg$$

con lo que $$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} + 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ N/kg$$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_P = V_{1P} + V_{2P}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

$$V_P = -\frac{GM_1}{r_{1P}} - \frac{GM_2}{r_{2P}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{2} = -3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J/kg$$

b)

Calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en ese desplazamiento.

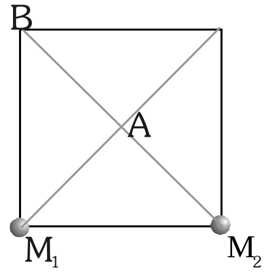
$$W_{Fg} = -\Delta Epg = -(Epg_O - Epg_\infty) = Epg_\infty - Epg_O = m \cdot V_\infty - m \cdot V_O$$

Teniendo en cuenta el origen de potencial escogido, el potencial a una distancia infinita será nulo. Así

$$W_{Fg} = -m \cdot V_O = -1kg \cdot (-3{,}34 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}) = 3{,}34 \cdot 10^{-10}\ J$$

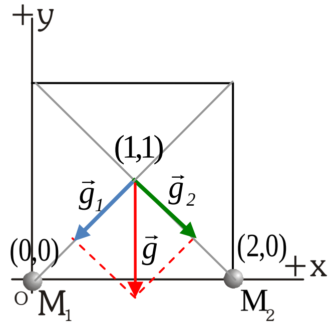
El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es positivo (la fuerza gravitatoria va a favor del desplazamiento)

20.(a) Dos partículas de 10 kg se encuentran situadas en dos vértices de un cuadrado de 2 m de lado, como indica la figura. Calcula campo y potencial gravitatorio en el punto A, así como el trabajo necesario para llevar la unidad de masa desde el punto A al B.



Resolvemos el primer caso:
Nos encontramos ante el campo gravitatorio creado por dos masas puntuales, por lo que aplicaremos el principio de superposición (el efecto que producen varias masas es igual a la suma de los efectos de cada partícula por separado)

Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A}$



El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 10\ kg$; $\vec{r}_1 = (1,1) - (0,0) = (1,1)m = \vec{i} + \vec{j}\ m$;

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{1A} = -\frac{GM_1}{r_1^{\ 2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = -2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en P:(0,2):

$M_2 = 10\ kg$; $\vec{r}_2 = (1,1) - (2,0) = (-1,1)m = -\vec{i} + \vec{j}\ m$;

$$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}\ m}{\sqrt{2}\ m} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{2A} = -\frac{GM_2}{r_2^{\ 2}} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)\tfrac{N}{kg} = 2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

con lo que

$$\vec{g}_A = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) + (2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) == -4{,}72 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_A = V_{1A} + V_{2A}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

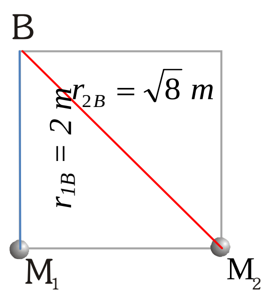
$$V_A = -\frac{GM_1}{r_{1A}} - \frac{GM_2}{r_{2A}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{2}} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{2}} = -4{,}72 \cdot 10^{-10} - 4{,}72 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} = -9{,}44 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}$$

Trabajo necesario para trasladar una masa de 1 kg desde el punto A al B.

Para calcular esto, tendremos en cuenta que la fuerza gravitatoria es conservativa, por lo que

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gB} - Ep_{gA}) = Ep_{gA} - Ep_{gB} = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m \cdot (V_A - V_B)$$

Conocemos el potencial en A (- 9,44 $\cdot 10^{-10}$ J/kg, calculado antes), pero necesitamos calcular el potencial en B



$$V_B = -\frac{GM_1}{r_{1B}} - \frac{GM_2}{r_{2B}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{8}} =$$

$$= -3{,}34 \cdot 10^{-10} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} = -5{,}70 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}$$

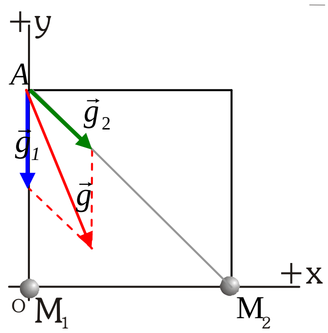
Así, $W_{Fg} = m \cdot (V_A - V_B) = 1\ kg \cdot (-9{,}44 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} + 5{,}70 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}) = -3{,}74 \cdot 10^{-10}\ J$

Obtenemos un valor negativo para el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria, ya que ésta se opone al desplazamiento. Por lo tanto, deberemos realizar un trabajo externo (aplicando una fuerza exterior) de al menos el mismo valor, pero con signo contrario.

$$W_{ext} \geq 3{,}74 \cdot 10^{-10} \ J$$

Dos masas de 10 kg se encuentran situadas en los dos vértices inferiores de un cuadrado de 2 m de lado. Calcula el campo y el potencial gravitatorio en el vértice superior izquierdo del cuadrado.

Nos encontramos ante el campo gravitatorio creado por dos masas puntuales, por lo que aplicaremos el principio de superposición (el efecto que producen varias masas es igual a la suma de los efectos de cada partícula por separado)



Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A}$

El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 10\ kg$; $\vec{r}_1 = (0{,}2) - (0{,}0) = (2{,}0)m = 2\vec{j}\ m$;

$$r_1 = 2\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{2\vec{j}m}{2m} = \vec{j}$$

$$\vec{g}_{1A} = -\frac{GM_1}{r_1^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2^2} \cdot \vec{j} \quad N/kg = -1{,}67 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ N/kg$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en A:(0,2):

$M_2 = 10\ kg$; $\vec{r}_2 = (0{,}2) - (2{,}0) = (-2{,}2)m = -2\vec{i} + 2\vec{j}\ m$;

$$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}\ m \quad ; \quad \vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j}\ m}{\sqrt{8}\ m} = \frac{-1}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\vec{j}$$

$$\vec{g}_{2A} = -\frac{GM_2}{r_2^{\,2}} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{8} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{8}}\vec{j}\right)\tfrac{N}{kg} = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

con lo que

$$\vec{g}_{(0,0)} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (-1{,}67 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) + (8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}) = 8{,}34 \cdot 10^{-11}\,\vec{i} - 2{,}5 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \tfrac{N}{kg}$$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_A = V_{1A} + V_{2A}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

$$V_A = -\frac{GM_1}{r_{1A}} - \frac{GM_2}{r_{2A}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{8}} = -3{,}34 \cdot 10^{-10} - 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg} = -5{,}70 \cdot 10^{-10}\ \tfrac{J}{kg}$$

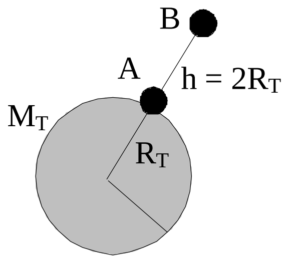
14.- Calcular:

a) Trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra. (M_T = 6·10^{24} kg ; R_T= 6370 km)

b) Velocidad a la que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura

a)

Ya que la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el objeto apunta hacia el centro de la Tierra, debemos ejercer una fuerza en sentido contrario que al menos igual (iría con velocidad constante) a la gravitatoria en cada punto para realizar el desplazamiento.



Calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en el desplazamiento.

$$W_{Fg} = -\Delta Ep_g = -(Ep_{gB} - Ep_{gA}) = Ep_{gA} - Ep_{gB} = m \cdot V_A - m \cdot V_B = m \cdot (V_A - V_B)$$

Calculamos el potencial en los puntos

- Inicial (A, superficie terrestre, $r_A = R_T = 6370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$)
- y final (B, a una altura h igual al radio terrestre, con lo que $r_B = R_T + h = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$)

$$V_A = -\frac{GM_T}{r_A} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6} = -6{,}283 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg}$$

$$V_B = -\frac{GM_T}{r_B} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{1{,}28 \cdot 10^7} = -3{,}127 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg}$$

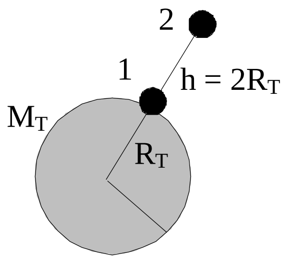
Por tanto, el trabajo

$$W_{Fg} = m \cdot (V_A - V_B) = 20\ kg \cdot (-6{,}283 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg} + 3{,}127 \cdot 10^7\ \tfrac{J}{kg}) = -6{,}312 \cdot 10^8\ J$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es negativo ya que se opone al desplazamiento. Así, para mover el objeto, debemos realizar un trabajo externo $W_{ext} \geq 6{,}312 \cdot 10^8\ J$

b)

Resolvemos esta cuestión aplicando la conservación de la energía mecánica al movimiento de la roca. Tras el lanzamiento, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica ($E_M = Ec + Epg$) se mantiene constante. Esto nos permite calcular la velocidad con la que habría que lanzarlo desde la superficie terrestre suponiendo que no hubiera rozamiento con la atmósfera.



Escogemos el origen de energía potencial a una distancia infinita de la Tierra. Esto hace que la expresión usada para la energía potencial gravitatoria sea: $Epg = -\frac{GMm}{r}$

Situación inicial: (v_1 = ? ; $r_1 = R_T$) $\quad E_{M1} = Ec_1 + Epg_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_T}$

Situación final: ($v_2 = 0$; $r_2 = 2R_T$) $\quad E_{M2} = Ec_2 + Epg_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = 0 - \frac{GMm}{r_2}$

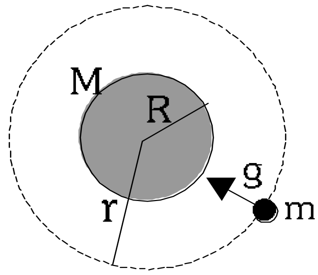
La energía mecánica se mantiene constante: $E_{M1} = E_{M2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R_T} = -\frac{GMm}{r_2}$

Sustituyendo $M = M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$r_1 = R_T = 6370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$
$r_2 = R_T + h = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$
$m = 20\ kg$

Obtenemos que $v_1 = 7944{,}8\ m/s$. (aproximadamente 7,9 km/s) Con esa velocidad habría que lanzarlo.

16. Un satélite describe una órbita circular de radio 2 R_T en torno a la Tierra..
a) Determine su velocidad orbital.
b) Si el satélite pesa 5000 N en la superficie terrestre, ¿cuál será su peso en la órbita? Explique las fuerzas que actúan sobre el satélite.
(R_T = 6400 km ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; G = 6,67 · 10^{-11} Nm^2 kg^{-2})

a)



La velocidad orbital es la velocidad que lleva el satélite en su órbita alrededor del planeta. Para calcularla, tendremos en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria. $Fg = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$

También, al tratarse de un movimiento circular, sólo tendrá aceleración normal.

Aplicando la segunda ley de Newton: $F_g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Igualando ambas expresiones: $\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

Teniendo en cuenta que $M = M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y que $r = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = 5{,}59 \cdot 10^3\ m \cdot s^{-1} = 5{,}59\ km/s$$

b)

El peso del satélite es la fuerza gravitatoria que el planeta ejerce sobre él. $Fg = m \cdot g = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$, en dirección radial y sentido hacia el centro del planeta (dibujo).
Sobre el satélite sólo actúa la fuerza gravitatoria, que es responsable de que describa el movimiento orbital, como ya se ha explicado en el apartado a)

El peso en la superficie terrestre nos permite conocer la masa del satélite $F_{g0} = m \cdot g_0$, donde g_0 es la gravedad superficial en la Tierra, que podemos considerar de aproximadamente 9,8 N/kg.
Así $F_{g0} = m \cdot g_0 \quad \rightarrow \quad 5000\ N = m \cdot 9{,}8\ \frac{N}{kg} \quad \rightarrow \quad m = 510{,}2\ kg$
Sustituyendo en la expresión de la fuerza gravitatoria en la órbita
$M = M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y que $r = 2 \cdot R_T = 12800\ km = 1{,}28 \cdot 10^7\ m$

$Fg = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = 1246{,}23\ N$ Este es el peso del satélite en su órbita.

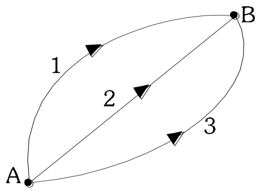
(Nota, este resultado puede variar según la aproximación que hagamos. Así, si consideramos que la gravedad superficial terrestre es de 10 N/kg, el resultado será de 1250 N)

CUESTIONES TEÓRICAS

Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

a) **El trabajo que realiza una fuerza conservativa sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos, es menor si se realiza a lo largo de la línea recta que une ambos puntos**

b) **El signo negativo que aparece en todas las expresiones que definen al campo gravitatorio se debe a que la interacción gravitatoria siempre es atractiva.**



a) En primer lugar, recordemos qué se entiende por fuerza conservativa:

- *fuerza conservativa es aquella para la cual, el trabajo realizado en un desplazamiento entre dos puntos, es independiente del camino escogido, sólo depende de los puntos inicial y final.*
- Otra definición, equivalente a la anterior, nos dice que *es conservativa toda aquella fuerza para la cual el trabajo realizado en un desplazamiento a lo largo de un camino cerrado es nulo.* $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Según la definición, vemos claramente que el trabajo realizado por la fuerza conservativa entre dos puntos va a ser el mismo sea cual sea el camino escogido, no siendo menor por un camino en concreto, aunque sea más corto. La afirmación es, por consiguiente, falsa.

b) La cuestión se refiere al signo negativo que aparece en la mayoría de las expresiones de campo gravitatorio creado por masas puntuales, esferas... Analicemos las principales expresiones.

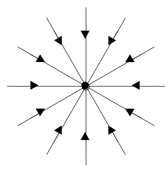
La fuerza gravitatoria entre dos masas viene dada por la ley de gravitación universal de Newton, cuya expresión vectorial es

$$\overrightarrow{F_g} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$

En ella, el signo negativo marca precisamente el carácter atractivo de la interacción, siempre teniendo en cuenta que, en dicha expresión, el sistema de referencia está colocado en una de las dos masas.

El campo gravitatorio (fuerza gravitatoria ejercida por unidad de masa)

$$\vec{g} = \frac{\overrightarrow{F_g}}{m} = \frac{-G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2 \cdot \cancel{m}} \cdot \overrightarrow{u_r} = \frac{-G \cdot M}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_r}$$



Vemos que el significado del signo negativo es el mismo que en la fuerza. Las líneas de campo, radiales, "entran" en la masa M que crea el campo.

Energía potencial: En la expresión $Ep_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$, el signo proviene, en parte, del signo correspondiente a la fuerza gravitatoria. Pero no olvidemos que esa fórmula lleva asociado un origen de potencial, un punto de referencia en el que consideramos que la energía potencial es nula. Y en esa expresión el origen está situado en el infinito, y eso hace que la energía potencial almacenada por un cuerpo en cualquier punto del espacio sea negativa. Si colocáramos el origen en otro punto, como la superficie terrestre, como ocurre en la expresión $Ep_g = m \cdot g \cdot h$, válida para alturas mucho menores que el radio del planeta, el signo negativo desaparece, ya que la energía potencial gravitatoria aumenta con la distancia a la masa que crea el campo.

Para el caso del potencial V, el razonamiento es el mismo que para la energía potencial. $V = \frac{Ep_g}{m}$

Como conclusión, podemos decir que el enunciado es cierto, pero con la matización de que no es el único factor que influye en dicho signo. También influyen el sistema de referencia escogido y el origen de potencial.

Dos satélites idénticos A y B, describen órbitas circulares de diferentes radios, $r_A > r_B$, alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

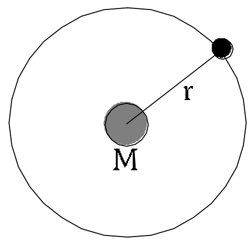
a) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía cinética?.

b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita $r_A = r_B$ y tuviesen distinta masa $m_A < m_B$, ¿Cuál de los dos tendría más energía cinética?

La energía cinética de un cuerpo en movimiento viene dada por $Ec = \frac{1}{2} m v^2$

Para el caso de un satélite que describe una órbita circular de radio r alrededor de un planeta, la velocidad se denomina *velocidad orbital*. Su expresión se obtiene a partir de la 2ª ley de Newton

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F_g = m \cdot a_n \rightarrow \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$



De este modo, la energía cinética del satélite queda

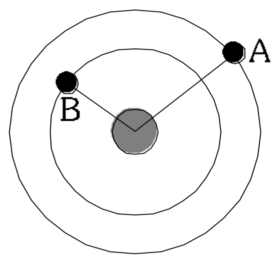
$$Ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2} m \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r} \quad ,$$

donde m es la masa del satélite, y M la del planeta.

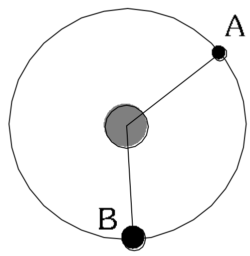
Visto esto, podemos responder fácilmente a las cuestiones planteadas.

a) Las energías cinéticas correspondientes a ambos satélites serán

$$Ec_A = \frac{G \cdot M \cdot m_A}{2 \cdot r_A} \quad ; \quad Ec_B = \frac{G \cdot M \cdot m_B}{2 \cdot r_B}$$



Como ambas masas son idénticas, la energía cinética va a depender exclusivamente de la distancia. Vemos que el satélite A, que está a mayor distancia, tendrá menor energía cinética. Por tanto, el satélite con mayor Ec será el B, que se encuentra más cerca.



b) Ahora ambos satélites se encuentran en órbitas de igual radio, pero las masas son diferentes. Aplicando las mismas expresiones del apartado a), vemos que el satélite de mayor masa tendrá mayor energía cinética. En este caso, será el B.

a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.

b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

La velocidad de escape para un planeta se define como *la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente.*

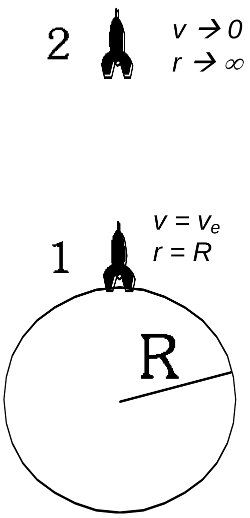
En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

Resolvemos el problema empleando conceptos energéticos:

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.

Datos: M, R: masa y radio del planeta

m: masa del proyectil



Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta.

El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$

Consideraremos dos situaciones:

Inicial: Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^2 \qquad Ep_{g1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Final: el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r\to\infty} E_M = \lim_{r\to\infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$ Puesto en función de la gravedad en superficie $v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Nótese que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta sólo depende de las características (masa, tamaño) del planeta. No importa la masa del proyectil. (Evidentemente, para acelerar un proyectil de más masa hasta esa velocidad se necesitará un mayor esfuerzo, pero eso es otra cuestión)

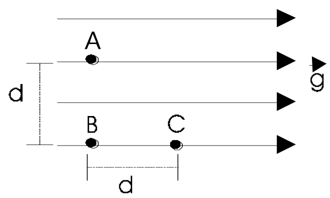
También puede hablarse de velocidad de escape desde una cierta altura h sobre la superficie. El concepto es el mismo, solo que en lugar de R pondremos R+h.

b) En la realidad la situación física difiere de lo explicado anteriormente. La presencia de la atmósfera terrestre introduce una fuerza no conservativa, la fuerza de rozamiento, que no puede ser despreciada. De hecho, a las elevadas velocidades de las que estamos hablando, tendrá un valor muy grande.

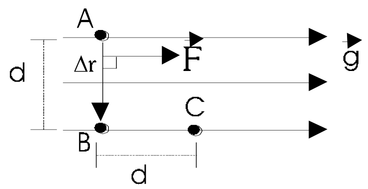
El efecto que produce este rozamiento es una disminución de la velocidad (de la Ec) y una disipación de energía en forma de calor, por lo que la energía mecánica del cohete no se mantendrá constante y disminuirá conforme se eleva según la expresión $\Delta E_M = W_{FRoz}$

De este modo, al salir de la atmósfera no tendrá energía suficiente como para alejarse indefinidamente, y llegará un momento, a una cierta altura, en que el cohete se pare y vuelva a caer hacia la Tierra.

En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo.
a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C.
b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.

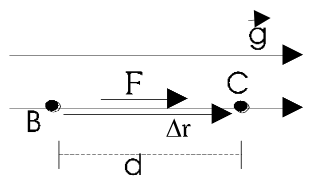


a) Nos encontramos ante un campo gravitatorio de intensidad constante $\vec{g}$. La fuerza gravitatoria que ejercerá este campo sobre una partícula de masa *m* colocada en su interior vendrá dada por $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$, y también será constante. El trabajo que realiza esta fuerza en un desplazamiento, que en general se calcula con la integral $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, podrá hacerse en este caso, al ser la fuerza constante, con la expresión $W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot cos\,\alpha$.



Así, en el desplazamiento de A a B, el trabajo será $W_{AB} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot d \cdot cos\,90^o = 0$ J, ya que la fuerza es perpendicular al desplazamiento.

En el desplazamiento de B a C, el trabajo será $W_{BC} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = mg \cdot d \cdot cos\,0^o = m \cdot g \cdot d$. Obtenemos un trabajo positivo, ya que la fuerza favorece el desplazamiento. En este caso, ya que nos dicen que la unidad de masa, el trabajo será $W_{BC} = g \cdot d$



b) El campo gravitatorio descrito es similar al campo gravitatorio terrestre al nivel de la superficie, considerando la aproximación de que los desplazamientos efectuados son muy pequeños en comparación con el radio terrestre ($R_T \approx 6400\ km$). En ese caso $\vec{g}$ terrestre puede considerarse un campo constante y uniforme con todas las características del campo de esta cuestión. La única diferencia está en su orientación. La dirección y sentido del campo terrestre es la vertical y su sentido hacia abajo, aunque esto último puede ser también una cuestión de punto de vista, del sistema de referencia escogido.

a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra?

b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿Puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

a) Para responder a esta cuestión debemos remontarnos al concepto de energía potencial y al origen de su expresión.

Energía almacenada por una partícula de masa m colocada a una cierta distancia de M, debido a la acción de la fuerza gravitatoria.

Partimos de la expresión general $\Delta Ep_g = -W_{Fg}$ Así tendremos:

$$\Delta Ep_g = -\int_A^B \overrightarrow{F_g} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{-G\cdot M\cdot m}{r^2}\cdot \overrightarrow{u_r} \cdot dr \cdot \overrightarrow{u_r} = G\cdot M\cdot m \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\cdot dr = G\cdot M\cdot m \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{rA}^{rB} =$$

$$= \frac{-G\cdot M\cdot m}{r_B} + \frac{G\cdot M\cdot m}{r_A} = Ep_B - Ep_A$$

Debemos escoger ahora el origen de potencial. Nos dicen que para $r_A = R_T$, $Ep_A = 0$. Sustituimos estos valores en el resultado anterior

Y la expresión quedará $Ep_g = \frac{-G\cdot M\cdot m}{r} + \frac{G\cdot M\cdot m}{R_T}$

Haciendo ahora el límite para $r \to \infty$

$$\lim_{r\to\infty} Ep_g = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{-G\cdot M\cdot m}{r} + \frac{G\cdot M\cdot m}{R_T}\right) = \frac{G\cdot M\cdot m}{R_T}$$

Este es el resultado buscado

b) El trabajo que realiza una fuerza, en general, viene dado por la expresión $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$, y el signo resultante de la operación será:

Positivo si la fuerza (o alguna de sus componentes) va a favor del desplazamiento.
Negativo si la fuerza (o alguna de sus componentes) se opone al desplazamiento.

La fuerza gravitatoria, como cualquier fuerza, puede realizar trabajo oponiéndose al desplazamiento de una partícula. Por ejemplo, si lanzamos un cuerpo hacia arriba con una cierta velocidad inicial, durante el movimiento de subida la fuerza gravitatoria se opondrá al desplazamiento y realizará un trabajo negativo, que restará energía cinética al cuerpo.

La energía potencial gravitatoria será positiva o negativa dependiendo del sistema de referencia escogido.

Escogiendo el origen de energía potencial a una distancia infinita de la masa *M* que crea el campo, la energía potencial almacenada por una partícula que esté a una distancia r , será $Ep_g = -G\cdot\frac{M\cdot m}{r}$. Como vemos, será siempre negativa en ese caso. Esto es debido a que el origen de Ep lo hemos colocado en el punto en el que mayor Ep puede almacenarse, ya que esta magnitud aumenta con la distancia.

Si colocáramos el origen en otro punto, como la superficie terrestre, como ocurre en la expresión $Ep_g = m \cdot g \cdot h$, válida para alturas mucho menores que el radio del planeta, el signo negativo desaparece, ya que la energía potencial gravitatoria aumenta con la distancia a la masa que crea el campo. La energía sería positiva para alturas positivas, por encima de la superficie, y negativa para alturas por debajo de la superficie.

Como conclusión, la energía potencial gravitatoria sí puede ser negativa, dependiendo del origen de potencial escogido.