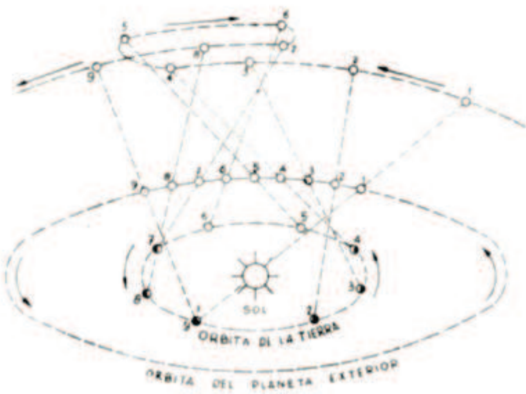
· TEMA 1 ·

Interacción Gravitatoria

"Entre vuestra merced,...en este paraíso,
que aquí hallará estrellas y soles que acompañan al cielo...;
aquí hallará las armas en su punto y la hermosura en su extremo"

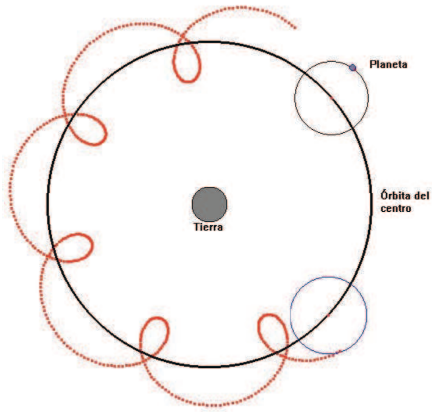
(Miguel de Cervantes (1547-1616). EL QUIJOTE. Cap. XLII)

Desde el comienzo de la civilización, uno de los temas que más ha intrigado al hombre ha sido el estudio y conocimiento de los cielos, los movimientos estelares y planetarios, la sucesión del día y la noche, los ciclos de las estaciones, etc.. En esta línea, los griegos, que consideraban al hombre como el eje de todo, supusieron que la tierra era el centro geométrico del Universo y que todos los cuerpos celestes se movían alrededor de nuestro planeta.



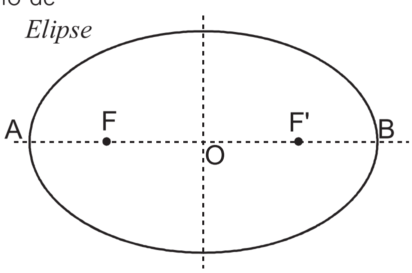
La primera hipótesis relacionada con el movimiento planetario consistió en suponer que los planetas describían círculos concéntricos, teniendo a la tierra en su centro. Sin embargo, esta suposición no explicaba satisfactoriamente el movimiento observado de los planetas, y la geometría del movimiento planetario se hizo más y más compleja.

Hasta entrado el siglo XVI, las ideas predominantes en este terreno eran las mismas que las del siglo II: las debidas al astrónomo alejandrino Ptolomeo (teoría de los epiciclos). No fue hasta la llegada de Nicolás Copérnico, cuando la situación comenzó a variar.



Epiciclos de Ptolomeo

Nicolás Copérnico (1473-1543) buscaba una solución más simple al movimiento planetario y llegó a proponer el sol, y no la tierra, como el centro de giro. En realidad, esta idea había sido propuesta mucho antes por el astrónomo griego Aristarco de Samos alrededor del siglo tercero antes de Cristo. Estas "nuevas ideas" copernicanas, alteraban el orden de colocación de las órbitas planetarias con respecto al sol. Lo que en realidad propuso Copérnico fue otro sistema de referencia situado en el sol, respecto al cual el movimiento de los planetas tenía una descripción más simple.



Lo propuesto por Copérnico, ayudó al astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) en el descubrimiento de las leyes del movimiento planetario, como resultado del análisis cuidadoso de las mediciones astronómicas de Tycho Brahe (1546-1601). Estas leyes, denominadas leyes de Kepler, son una descripción cinemática del movimiento planetario y se enuncian del siguiente modo:

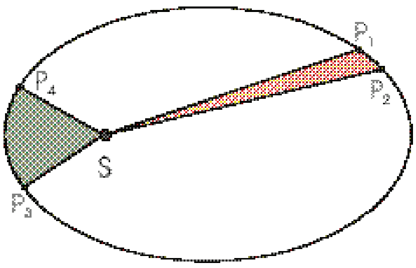
I. Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos.

$$\text{excentricidad} \quad e = \frac{OF'}{OB} = \frac{OF}{OA} \leq 1$$

$$e \approx 0 \Rightarrow \text{órbita circular}$$

Esta primera ley supuso un primer cambio en el esquema del funcionamiento de los cielos, ya que se consideraba el círculo la figura geométrica "perfecta" y que por tanto esa habría de ser la órbita que describieran los objetos en el cielo. Esta fue una herencia de Platón y Aristóteles que al propio Kepler le costó esfuerzo desterrar.

II. El vector de posición de cualquier planeta con respecto al sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales. (Esta proposición se denomina la ley de las áreas)



Esta ley "obligaba" a que los planetas NO se movían con la misma rapidez alrededor del Sol, y que por lo tanto, las estaciones NO duraran lo mismo en ambos hemisferios. Evidentemente, el planeta, para desplazarse de P1 a P2 va más despacio que para hacerlo de P3 a P4 para que las áreas barridas sean iguales.

III. Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r). (Esta ley puede expresarse por la ecuación matemática $T^2 = K \cdot r^3$, siendo K una constante de proporcionalidad, o expresado de otro modo: "para cada planeta que orbita alrededor del sol el cociente T^2/r^3 permanece constante".

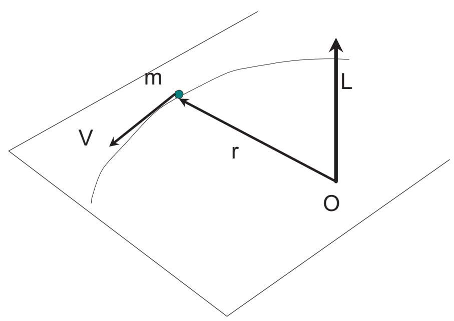
La siguiente etapa en la historia de la Astronomía fue una discusión de la dinámica del movimiento planetario y un esfuerzo por determinar la interacción responsable de tal movimiento. Es aquí donde Sir Isaac Newton (1642-1727) llevó a cabo su grandiosa contribución: la ley de gravitación universal; a partir de entonces, el pensamiento de la Humanidad, ya no sería el mismo de antes. Esta ley, determina y permite calcular la interacción entre dos cuerpos masivos separados una cierta distancia. Aplicada al movimiento planetario, las conclusiones que de ella se derivan cambiaron por completo la visión de los cielos. De hecho, se debe al mismo Newton el genio de encontrar una ley matemática exacta que rige el movimiento de los planetas. La secuencia de su razonamiento era el siguiente:

I. Sobre los planetas, deben actuar una fuerza resultante neta NO equilibrada, ya que si no, los planetas seguirían una trayectoria rectilínea (ley de inercia)

II. La anterior fuerza, cualquiera que sea su magnitud o su naturaleza, debe tener una dirección constantemente dirigida hacia el centro de la trayectoria (fuerza central). La razón que dio Newton fue que de este modo, se cumple la 2ª ley de Kepler.

"La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales en la Naturaleza. Aunque su importancia es despreciable entre las interacciones entre partículas elementales, la gravedad tiene una importancia fundamental en las interacciones de objetos grandes. La fuerza gravitatoria juega un papel importante en la evolución de las estrellas y en el comportamiento de las galaxias. En cierto sentido, la gravedad es la que mantiene reunido todo el Universo"

Veamos esta afirmación utilizando terminología matemática moderna.



Se define la magnitud MOMENTO ANGULAR, L , de una partícula como el Momento de su cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

La segunda ley de Newton establecía que: $\sum F = dp/dt$ para los movimientos de traslación. De modo similar hay una ley parecida para las rotaciones (como la de los planetas), pero que implica al Momento Angular y que vamos a deducir ahora.

Para hallarla derivamos L:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

pero como

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$$

y la velocidad y el momento lineal tienen la misma dirección y sentido, nos quedará sólo que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{M}$$

que es una expresión equivalente a

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

muy útil para la rotación, y una de las ecuaciones más importantes de la física clásica.

A1. ¿Cuáles serán las unidades del módulo del momento angular?

A2. Una partícula de 2 kg de masa, situada en la posición (3,2,0) referido a cierto observador, se mueve con velocidad $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ (SI). Determina el momento angular con respecto a ese observador.

A3. Una partícula de masa m realiza un movimiento circular uniforme de radio r, con rapidez angular w. Determinar su momento angular.

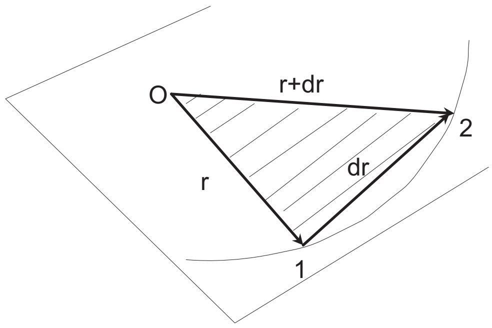
A4. Si el radio de la órbita circular de un planeta A es cuatro veces mayor que la de otro B, ¿en qué relación están sus periodos? ¿Y sus rapideces medias?

Lógicamente, de la última ecuación obtenida, se deduce que si el Momento de las fuerzas es nulo, la derivada del Momento angular ha de ser cero, y por lo tanto, el momento angular ha de conservarse. Esto es, si M = 0

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\wedge\vec{F}=\vec{M}=0\Rightarrow\vec{L}=cte.$$

En efecto, si admitimos que las órbitas son circulares (o elípticas) y ya que la fuerza que actúa sobre el planeta es central, se concluye que M ha de ser cero (ya que lo es el producto vectorial que lo define al ser el vector de posición y la fuerza que mueve al planeta de igual dirección). Por lo tanto, L se ha de conservar tanto en módulo como en dirección.

- Que la dirección y sentido del Momento Angular se conserve, significa que la trayectoria planetaria ha de ser plana (esto es, en un mismo plano).
- Que el módulo del Momento Angular se conserve, acarrea la demostración de "la ley de las áreas" de Kepler.



En efecto, si la partícula se mueve desde la posición 1 a la 2, recorre en un intervalo de tiempo dt, un arco de tramo dr. El área barrida por el radio vector será:

$$dS=\frac{1}{2}|\vec{r}\wedge d\vec{r}|$$

y por otro lado:

$$dS=\frac{1}{2}|\vec{r}\wedge d\vec{r}|=\frac{1}{2}|\vec{r}\wedge\vec{v}dt|=\frac{1}{2}|\vec{r}\wedge v|dt\Rightarrow dS=\frac{1}{2m}|\vec{r}\wedge m\vec{v}|dt\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m}=cte.$$

es decir, "el área barrida por el radio vector en cada unidad de tiempo (velocidad areolar) es constante"; esto es, el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

En realidad, una demostración más purista de esta ley de Kepler de las áreas exige la utilización de las llamadas coordenadas polares y su inclusión en la conservación del momento angular, que aunque no es complicado, lo evitamos para no alargar en exceso este tema.

(Demostrar que la conservación de L, exige que la velocidad de un planeta es diferente en el afelio y en el perihelio)

Q1. El sol, visto desde la Tierra, se mueve más rápidamente contra el fondo de estrellas en invierno que en verano. Sobre la base de este hecho y de las leyes de Kepler, ¿qué puede decirse acerca de la distancia relativa de la Tierra al Sol durante estas estaciones? ¿Y de la duración de las estaciones en los distintos hemisferios de la Tierra?

Q2. Marte posee un satélite con un periodo de 460 min y que describe una órbita con un semieje mayor de 9,4 Megametros. ¿Cuál es la masa de Marte?

La que se denominó ley de la gravitación universal de Newton, suponía que **la fuerza gravitatoria era atractiva**, pero eso NO significaba que tal fuerza fuese la responsable del movimiento planetario observado y de las leyes de Kepler. Simplificando el método usado por Newton, éste usó las leyes de Kepler para obtener su ley de la gravitación. Supongamos ahora un planeta (de masa m) girando alrededor del Sol (de masa M). Para él podríamos plantear las siguientes ecuaciones:

$$F = m.a_c = m.\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R$$

$$T^2 = K.R^3$$

o sea:

$$F = \frac{4\pi^2}{K} \cdot m \cdot \frac{1}{R^2}$$

esto es, la fuerza gravitatoria debería variar con el inverso del cuadrado de las distancias, siendo m la masa del planeta. Por otro lado, *según la tercera ley de Newton*, podremos escribir que

$$\frac{4\pi^2}{K_1} \cdot m \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{4\pi^2}{K_2} \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} \Rightarrow \frac{m}{K_1} = \frac{M}{K_2} = cte. \Rightarrow m \cdot K_2 = M \cdot K_1 = cte'$$

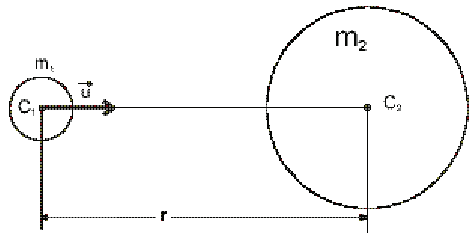
por lo que

$$F = \frac{4\pi^2}{K} \cdot \frac{M}{M} \cdot \frac{m}{R^2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

ya que K · M = cte. Siendo $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m/Kg^2$ la conocida como "**constante de la gravitación Universal**".

La expresión anterior nos da EL MÓDULO de la fuerza gravitatoria, la cual, es siempre atractiva ente dos masas cualesquiera situada a una cierta distancia. Además **es una fuerza central** (y como veremos, conservativa), esto es su dirección pasa por el centro que une ambos cuerpos.

De forma más general, si consideramos dos cuerpos de masas m1 y m2 cuyos centros C1 y C2 están separados una distancia r y suponemos que u es un vector unitario en la dirección de la recta que pasa por C1 y C2 y cuyo sentido es de C1 hacia C2, la fuerza con que el cuerpo de masa m1 atrae al de masa m2 la podemos escribir:



$$\vec{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}$$

La fuerza gravitatoria es una FUERZA CENTRAL, es decir, la fuerza actúa a lo largo de la línea que une los dos cuerpos. Depende de la distancia entre ambos cuerpos. Es una fuerza conservativa.

1. CONCEPTO FÍSICO DE CAMPO

Si se empuja un objeto con la mano, no es difícil de entender cómo tiene lugar la interacción entre la mano y el objeto, ya que ambos "*están en contacto*". Sin embargo, ¿cómo puede explicarse la interacción entre la Tierra y el Sol, separados una distancia de 150 millones de kilómetros? ¿Son diferentes la interacción mano-objeto y la interacción Tierra-Sol?

En realidad, si analizamos de verdad el término "contacto", descubriremos que en verdad no hay diferencias entre ambos tipos de interacciones. El término "contacto", entendido como distancia nula, NO EXISTE. Cuando, por ejemplo, empujamos una mesa, los electrones más externos de los átomos situados en la superficie de nuestra mano, no llegan nunca a estar en contacto con los electrones más externos de la mesa, ya que ello requeriría, según la ley de Coulomb: $F = KQ1Q2/d^2$ ejercer una fuerza infinita (d = 0). Por ello, utilizamos el término contacto como una sensación fisiológica, ya que nuestro sentido del tacto "nota" el "contacto" a cierta distancia". Por lo tanto, TODAS las interacciones que se producen entre los cuerpos, son realmente interacciones a distancia. Queda en pié la cuestión relativa a cómo se transmite la interacción, y no sólo eso, ¿se transmiten "instantáneamente" las interacciones? Todas estas dificultades no pasaron desapercibidas al propio Newton cuando formuló su ley de la gravitación, sin embargo, no pudieron superarse hasta que a mediados del siglo XIX, Michael Faraday, en sus estudios sobre electricidad, introdujo el concepto de campo y éste pasó a generalizarse.

> "TODAS las interacciones que se producen entre los cuerpos, son realmente interacciones a distancia. Queda en pié la cuestión relativa a cómo se transmite la interacción, y no sólo eso, ¿se transmiten "instantáneamente" las interacciones?"

- **A qué se llama CAMPO de fuerzas.**

Supongamos dos cuerpos que están interaccionando entre sí, ejerciendo cada uno de ellos fuerza sobre el otro. Si vamos situando el segundo cuerpo en distintas posiciones alrededor del primero, actuará en cada caso una fuerza distinta sobre él. Esto puede interpretarse admitiendo que cada punto del espacio alrededor del primer cuerpo está dotado de cierta propiedad, creada por éste, que hace que, al colocar allí un segundo cuerpo, actúe sobre él una fuerza. A esa propiedad la denominamos campo. La existencia del campo en cada punto hace que, al colocar otro cuerpo en uno de esos puntos, aparezca sobre él una fuerza. De este modo, la fuerza que actúa sobre el segundo cuerpo se debe al campo que crea en ese punto el primer cuerpo. Así, al crear el cuerpo un campo de fuerzas que actúa sobre los cuerpos colocados a su alrededor, evitamos las dificultades que entraña admitir una acción a distancia, ya que en cada punto del espacio existe un valor del campo.

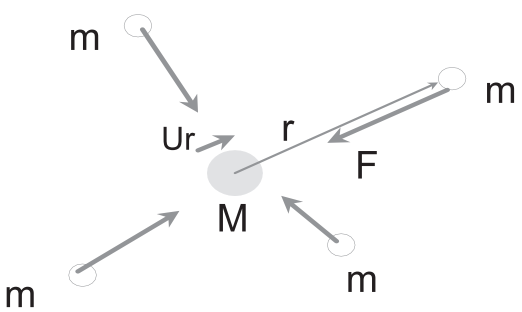
Cálculo del CAMPO

Si queremos determinar el campo gravitatorio creado por una masa M en puntos situados a su alrededor, colocamos una masa m en esos puntos y medimos la fuerza que actúa sobre esa masa. La expresión vectorial de esa fuerza, sobre la masa m será:

> * La Tierra crea a su alrededor cierta propiedad, denominada campo gravitatorio, que hace que, al situar un cuerpo en sus proximidades, actúa sobre él una fuerza de atracción.
>
> * Una carga eléctrica crea a su alrededor un campo eléctrico, de tal modo que, al colocar una nueva carga en las proximidades de la 1ª, medimos sobre ella una fuerza.

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}_r$$

para lo que se ha definido el vector unitario u_r en la dirección que une las masas y sentido contrario a F, de ahí el signo negativo que aparece en la expresión anterior (ver figura).



Se define el campo gravitatorio creado por M *como la fuerza que se ejerce en cada punto sobre la unidad de masa, al colocarla en dicho punto*:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

De esta forma, a cada punto alrededor de M se lo puede caracterizar por un valor de g. A este g se lo suele también denominar INTENSIDAD DE CAMPO.

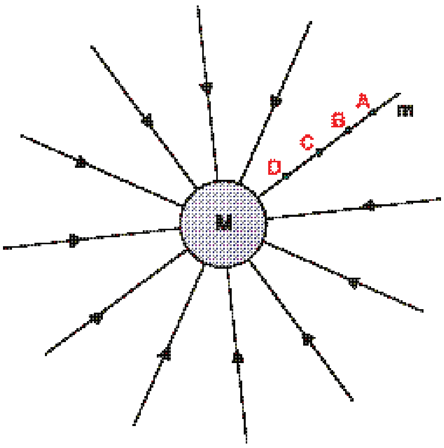
Según esto, la intensidad del campo es un vector de la misma dirección y sentido que la fuerza por ser el cociente de un vector por un escalar. Y la fuerza ejercida por el campo sobre una masa m′ situada en un punto del campo será m′ veces mayor:

$$\vec{F} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r \cdot m' \Rightarrow \vec{F} = m' \cdot \vec{g}$$

Este es el peso del cuerpo (de masa m′) en el punto considerado.

El campo gravitatorio es un ejemplo de campo vectorial o campo de fuerzas porque a cada punto del campo va unido un vector o fuerza, que es su intensidad.

Si suponemos que la masa m se coloca en el punto A y se le deja moverse libremente, la atracción que sobre ella ejerce M hará que ocupe una serie de posiciones sucesivas B,C,D… que en conjunto constituye una de las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por la masa M.



Los campos de fuerza se representan por líneas de fuerza, *o líneas de campo*, e indican la trayectoria que seguiría la unidad de masa abandonada en un punto cualquiera del campo gravitatorio. Dichas líneas de fuerza se caracterizan por ser curvas tangentes al vector campo en todos sus puntos. Las líneas del campo gravitatorio, tienen dirección radial y están dirigidas hacia el centro de la masa que crea el campo. Se dice que son sumideros.

Dado que la fuerza que actúa sobre una masa m situada en un punto del campo gravitatorio creado por otra partícula material es única, las líneas de fuerza del campo gravitatorio no se cortan, excepto en el punto donde se encuentra la masa que crea el campo, en el que convergen todas las líneas de fuerza (consideraremos, por lo tanto, que una masa puntual no está sometida a los efectos de su propio campo)

Q3. Por analogía con lo anterior, ¿cuál sería la expresión para el campo eléctrico? ¿Cuáles serían sus unidades? ¿Y las del campo gravitatorio?

Q4. Determinar el valor del campo gravitatorio creado por la Tierra (considerada como masa puntual) en puntos situados a 6500 km de distancia de ella. Indicar su dirección y sentido.

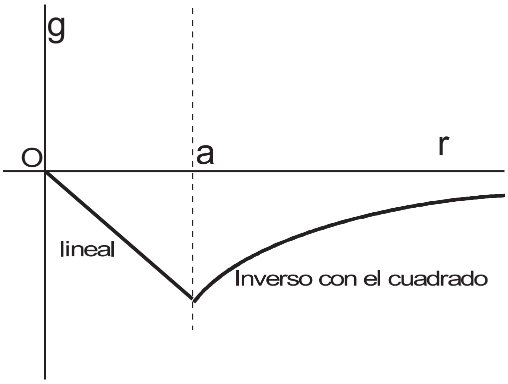
Q5. A.-En un punto del espacio existe un campo gravitatorio cuya intensidad es 6,7 N/kg. Calcular el módulo de la fuerza que aparece sobre una masa de 10 kg al situarla en ese punto. ¿Cuál es la dirección y sentido de esa fuerza?
B.-Determina el campo eléctrico que crea una carga puntual de 1 C, en puntos del vacío situados a 1 m de distancia. Analiza su dirección y sentido.

Q6. Tres masas iguales, de 100 kg cada una están situadas en los siguientes puntos: M1(0,0); M2(6,0); M3(3,2). Determinar el campo gravitatorio que crean estas masas en el punto (3,1). ¿Cuál será el valor de la fuerza resultante que actúa sobre una masa de 100 kg situada en ese punto?

(Realizar el esquema de líneas de fuerza para el caso de 2 masas separadas una cierta distancia)

No hay que olvidar que el campo gravitatorio es una magnitud vectorial, por lo que determinar su valor en un punto del espacio bajo la influencia de varias masas, requiere hacer uso del cálculo vectorial. De este modo, el campo gravitatorio total en un punto, debido a la acción de varias masas, se corresponderá con la suma vectorial de cada uno de los campos individuales en ese punto (Principio de superposición)

Además conviene recordar aquí que el campo gravitatorio es conservativo, porque el trabajo para trasladar una masa de un punto a otro no depende de la trayectoria seguida. Ya se estudió algo de ello en el curso anterior. Con todo, nos volveremos a referir con más detalle al abordar los aspectos energéticos del campo gravitatorio.

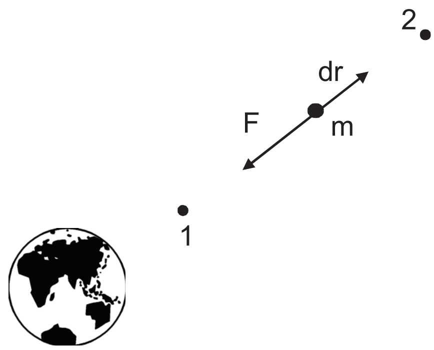


Puede demostrarse que una esfera sólida homogénea de radio "a" produce, en puntos externos a ella, un campo gravitacional idéntico al que crea una partícula de igual masa situada en el centro de esa esfera, de modo que gráficamente puede mostrarse esta variación como se ve seguidamente en la representación.

2. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA CONCEPTO DE POTENCIAL

Ya en otro curso se ha visto que la fuerza de **la gravedad es una fuerza conservativa**. Como todas las fuerzas de estas características, llevará asociada una "Energía Potencial", de modo que el trabajo entre dos puntos sea igual a menos la variación de energía entre esos dos puntos:

$$W_1^2 = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2$$



Vamos a determinar el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al mover una masa desde un punto 1 a otro punto distinto 2. Realmente, cualquier desplazamiento se puede considerar como la composición de dos: uno paralelo a la dirección del campo y otro perpendicular a la dirección del mismo. Ahora "el problema" para ese cálculo del trabajo reside en que la fuerza que actúa sobre la masa "m" NO es constante, pues depende de la distancias, y éstas cambian.

Sólo se realiza trabajo en el tramo que es paralelo al campo, mientras que el trabajo es nulo en el trayecto en el que el desplazamiento es perpendicular al campo.

De este modo, el trabajo podemos calcularlo así:

$$W = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} = \int_1^2 -G\frac{m\cdot M_T}{r^2}dr = -Gm\cdot M_T\left|-\frac{1}{r}\right|_1^2 = G\frac{m\cdot M_T}{r_2} \quad - \quad G\frac{m\cdot M_T}{r_1}$$

$$U_1 = -G\frac{m\cdot M_T}{r_1} + cte.$$

$$U_2 = -G\frac{m\cdot M_T}{r_2} + cte.$$

Hay que tener presente, que la primera expresión nos determina la VARIACIÓN de energía potencial entre dos puntos, por lo que si se quiere asignar valores absolutos a la energía potencial de un cuerpo en un determinado punto del campo, será necesario establecer un valor de referencia. Este valor de referencia PUEDE SER CUALQUIERA. Hasta este momento (en el curso pasado) se usaba el criterio de que la energía potencial de un cuerpo era cero en la superficie de la Tierra. Vamos a llamar a éste el criterio 1.

Criterio 1: La energía potencial de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra es nulo.

En este caso, si consideramos el punto 1 en la superficie de la Tierra, el convenio anterior nos lleva a escribir que:

U1 = 0 cuando r1 = RT $\Rightarrow$

$$0 = -G\frac{m \cdot M_T}{R_T} + cte \quad \Rightarrow \quad cte = G\frac{m \cdot M_T}{R_T}$$

Con lo que la energía potencial de un cuerpo a una distancia r del centro de la Tierra será:

$$U_r = -G\frac{m \cdot M_T}{r} + G\frac{m \cdot M_T}{R_T} = G \cdot m \cdot M_T \frac{r - R_T}{r \cdot R_T}$$

> Teniendo en cuenta el convenio 1, demostrar que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado en el infinito es U = $m \cdot g_0 \cdot RT$

sustituyendo r = RT + h y G· MT = $g_0 \cdot R^2$ queda:

$$U_r = m \cdot g \cdot h \cdot \frac{R_T}{R_T + h}$$

Criterio 2: La energía potencial gravitatoria de un cuerpo situado en el infinito es nula.

En este caso, escribiremos:

U1 = 0 cuando r1 = ∞ esto es:

$$0 = -G\frac{m \cdot M_T}{\infty} + cte. \Rightarrow cte = 0$$

y en este caso:

$$U_r = -G\frac{m \cdot M_T}{r} + 0$$

esto es

$$U_r = -G\frac{m \cdot M_T}{r}$$

El último criterio es el que generalmente se adopta, y se hace extensivo a dos masas cualesquiera, siendo entonces la expresión de la energía potencial gravitatoria del tipo:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

De esta expresión, y del criterio seguido para ella, se deducen algunas cosas interesantes:

- *Que a cada posición relativa de dos masas corresponde una energía potencial:*

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

- *Que a la posición infinito corresponde una energía potencial nula*

> - Cuando dos cuerpos se acercan, la energía potencial disminuye. El trabajo de acercamiento lo realiza la fuerza gravitatoria a costa de la energía potencial.
> - Cuando separamos dos masas, hay que aplicar una fuerza exterior al sistema. Esta fuerza se emplea para aumentar la energía potencial, la cual tomará su valor máximo en el infinito.
> - La energía potencial de un sistema formado por más de dos partículas se obtiene sumando las energías correspondientes a los sistemas que se pueden formar con las partículas tomadas dos a dos.

- *Que la energía potencial gravitatoria es siempre negativa. El sentido físico de este signo negativo es simple: según el teorema de la energía potencial, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a la disminución de la energía potencial. Por consiguiente, conforme la fuerza gravitatoria realiza el trabajo de acercamiento de las dos masas, la energía potencial disminuye. Si inicialmente la energía potencial era cero, forzosamente al final del desplazamiento, será negativo.*

⊕ (¿Qué unidades poseerá la Energía potencial gravitatoria?)

Según todo lo anterior, cabe preguntarse **cómo varía la energía potencial entre dos puntos cualesquiera**. Lógicamente, si las posiciones de los cuerpos cambian, también lo hace la energía potencial, pero ¿de qué modo?.

Supongamos que la partícula m2 se traslada del punto A al punto B. Para la variación de energía potencial, podremos escribir que:

$$\Delta U = U(B) - U(A) = -G\frac{m_1 m_2}{r_B} - \left(-G\frac{m_1 m_2}{r_A}\right) = \frac{Gm_1 m_2}{r_A} - \frac{Gm_1 m_2}{r_B} = Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Vemos que si $r_B = r_A = r$ (constante), la partícula m2 se desplaza sobre una superficie esférica cuyo centro está en m1 y cuyo radio vale r. En este caso, la energía potencial permanece constante. Esta superficie se denomina superficie equipotencial.

Podemos decir, que en principio, **hay tres formas equivalentes de definir un campo de fuerzas conservativo**:

Cuando el trabajo realizado por las fuerzas DEL CAMPO No depende de la trayectoria seguida.

Cuando el trabajo de las fuerzas DEL CAMPO a lo largo de un camino cerrado vale cero.

Cuando existe una función Energía potencial tal que el trabajo realizado por las fuerzas del campo entre dos puntos A y B puede expresarse como diferencia $W_{A\text{-}B} = U(A) - U(B)$

Usando "*el criterio del infinito*" también se llega a una conclusión conocida. Para ello, en las ecuaciones anteriores basta hacer m1 = M (masa de la Tierra) y m2 = m (masa del cuerpo).

Así, cuando un cuerpo está a una distancia r del centro de la Tierra, su energía potencial es:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r} = -G\frac{Mm}{(R+h)}$$

siendo R el radio de la Tierra.

La VARIACIÓN de energía potencial que experimenta el cuerpo al elevarlo una determinada altura h (con R >> h), puede obtenerse así: (admitiendo que si h<<R ⇒ h/R ≈ 0)

$$\Delta U = Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{(R+h)}\right) = GMm\frac{R+h-R}{(R+h)R} = GMm\frac{h}{R(R+h)} =$$

$$gm\frac{R^2 h}{R(R+h)} = gm\frac{Rh}{R+h} = gm\frac{h}{1+\frac{h}{R}} = mgh = mg(h_B - h_A)$$

Ahora podemos ver, de nuevo, que la 'antigua' expresión U = mgh que utilizábamos en el curso pasado, representa variaciones de energía potencial. Por lo tanto, sólo tiene sentido cuando se establece un nivel de referencia. Este nivel de referencia se toma arbitrariamente, pero es preciso especificarlo en cada caso.

Igualmente, la variación de energía potencial, puede ser positiva o negativa, teniendo presente las variaciones que con la altura experimenta g.

- **Un nuevo concepto: el POTENCIAL.**

Lo anteriormente expuesto a propósito del campo gravitatorio terrestre, es aplicable, por supuesto a dos masas cualesquiera. De este modo, la existencia de M hace que, al situar una masa m en un punto a su alrededor, adquiera cierta energía potencial. Por tanto, podemos suponer que M "crea" en cada punto del espacio a su alrededor cierta propiedad, a la que denominaremos potencial gravitatorio, V. En realidad, el potencial gravitatorio, no es más que la energía potencial que adquiriría la unidad de masa situada en ese punto: (¿En qué unidades se medirá V?)

$$V = \frac{U(r)}{m} = -G\frac{M\cdot m}{r\cdot m} = -G\frac{M}{r}$$

De esta forma, cada punto alrededor de M posee cierto potencial, siendo nulo el potencial a distancias infinitas de la masa que crea el campo. Al situar una masa m en uno de esos puntos, la energía potencial que adquiere es:

$$U(r) = m \cdot V$$

Así, tenemos en cada punto del espacio alrededor de M un valor para el campo gravitatorio, g, que nos proporciona la fuerza que actúa sobre una masa m, situada en ese punto, y un valor para el potencial (magnitud escalar), V, que nos permite conocer la energía potencial que adquiere m al situarla allí.[1]

Q7. Determina el potencial gravitatorio en el punto (3,1) de la distribución de masas de Q6.

Q8. Calcula el potencial gravitatorio que crea la Tierra, considerada como masa puntual, en puntos situados a 6500 km de distancia de ella.

Q9. ¿Puede ser nulo el potencial gravitatorio que crea un conjunto de masas Mi en algún punto que no esté infinitamente alejado del sistema? ¿Puede serlo el campo?

Q10. ¿Cómo varía el potencial gravitatorio creado por una masa M, según nos alejemos o nos acerquemos a ella, de acuerdo con los criterios expuestos en las explicaciones?

"Así, tenemos en cada punto del espacio alrededor de M un valor para el campo gravitatorio, g, que nos proporciona la fuerza que actúa sobre una masa m, situada en ese punto, y un valor para el potencial V, que nos permite conocer la energía potencial que adquiere m al situarla allí."

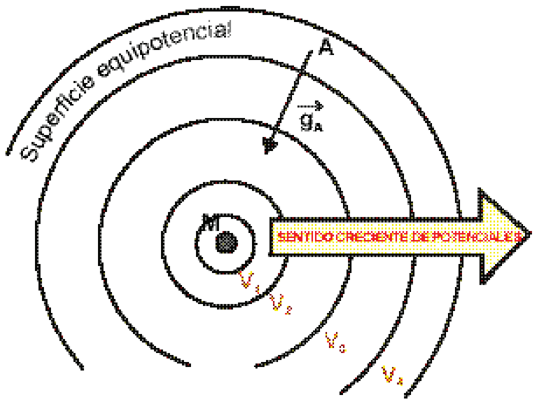
Q11. Una masa de 5 kg tiene en cierto punto una energía potencial de -100 J. ¿Cuánto vale en ese punto el potencial gravitatorio?

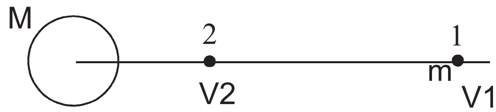
Q12. El potencial gravitatorio en un punto es -100 J/kg. Halla el trabajo externo que hay que realizar para situar en dicho punto una masa de 10 kg traída desde el infinito. ¿Cómo se interpreta el signo obtenido? ¿Cómo varía la energía potencial de esta masa?

Significado Físico del potencial.

Si asignamos el valor cero de energía potencial para dos masas cuando éstas están infinitamente alejadas, el potencial gravitatorio en un punto representa el trabajo realizado por el campo para trasladar la unidad de masa desde el infinito (o sea, desde fuera del campo) hasta ese punto. En este caso, el potencial en un punto es siempre negativo:

$$V = -G\frac{M}{r}$$





Según este criterio, el potencial mayor, en un campo gravitatorio, es el del infinito, que vale cero. A medida que penetramos en el campo, el potencial disminuye (es negativo). Como sabemos, el CAMPO va dirigido hacia la masa que lo crea, esto es, hacia los potenciales gravitatorios DECRECIENTES. Esto significa que el proceso de "acercamiento" hacia la masa que crea el campo, puede ser espontáneo. En efecto, dado que V1 > V2, y como W podemos escribirlo como $W_{1,2} = m(V1-V2)$, en el proceso "de acercamiento" las fuerzas del campo realizarán un trabajo positivo que hace disminuir la energía potencial del sistema.

En cambio, para ALEJAR dos masas hay que aplicar una fuerza externa que realizará un trabajo CONTRA el campo que se emplea en aumentar la energía potencial: W2,1 = m(V2-V1) ⇒ negativo. Este proceso, lógicamente, NO es espontáneo.

[1]En realidad, existe una relación matemática precisa entre el campo y el potencial. Tal relación involucra un nuevo concepto matemático: el gradiente, que se estudiará en otros niveles.

3. ALGUNOS ASPECTOS DE INTERÉS RELACIONADOS CON EL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE. MOVIMIENTO DE SATÉLITES.

Conocemos que para valores de r no muy alejados de la superficie terrestre, admitiendo a nuestro planeta como una esfera perfecta y homogénea, el módulo de la intensidad de campo gravitatorio tiene un valor cercano a 9,8 N/kg. Sin embargo, este valor se modifica al elevarnos o al profundizar en el interior de la Tierra.

Cuando nos elevamos una distancia h sobre la superficie terrestre, el módulo del campo gravitatorio en ese punto será:

$$g = G\frac{M}{(R+H)} = G\frac{M}{R^2}\cdot\frac{1}{(1+h/R)^2}$$

y si h <<R, resulta que[2]:

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 \approx 1+2\bullet\frac{h}{R} \Rightarrow g = g_0(1+h/R)^{-2} \approx g_0(1-2\frac{h}{R})$$

siendo $g_0 = G \cdot M/R^2$ el valor de la gravedad en la superficie terrestre.

Q13. Calcula cómo varía g al elevarnos 1000 m sobre la superficie terrestre. ¿Hasta dónde habría que subir para que g se redujera en un 10 %?

- **Movimiento de Satélites.**

Lanzar un objeto de masa m desde la superficie de la Tierra, de modo que pueda escapar del campo gravitatorio que ésta crea (esto es, energía potencial cero), es una tarea que requiere un determinado aporte energético, a suministrar desde el lugar del lanzamiento, por ejemplo desde la Tierra. El balance energético quedaría del modo:

$$-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{r} = 0$$

$$G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2G\frac{M}{R}$$

como

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

queda

$$v = \sqrt{2gR}$$

De todo lo anterior, pueden extraerse algunas consecuencias importantes. Así, por ejemplo, vemos que si la energía cinética que en la Tierra se suministra al cuerpo es menor que GMm/R, el cuerpo volverá a caer a la Tierra después de elevarse a una cierta altura. Sin embargo, si se lanza con una energía cinética mayor que GMm/R, la masa no volverá a caer sobre la Tierra. La velocidad correspondiente a una energía cinética igual a G · MT m/RT es independiente de la masa de la partícula y recibe el nombre de velocidad de escape.
El valor de la velocidad antes deducido para el lanzamiento desde la superficie terrestre tiene un valor de unos 11 km/s, y también se la denomina *segunda velocidad cósmica*, llamándose primera velocidad cósmica a la que debemos darle a un satélite para que gire alrededor de la superficie terrestre.

La energía GMm/R recibe el nombre de **energía de ligamiento**. Así, podemos decir que si la energía cinética es menor que la energía de ligamiento en la superficie terrestre, la masa no abandonará la Tierra sino que se elevará hasta una altura máxima r_m y luego volverá a caer sobre la Tierra. Si la energía cinética es mayor que la energía de ligamiento, el objeto continuará su movimiento indefinidamente y no volverá a la Tierra. La velocidad

[2] Si la distancia h es pequeña comparada con R (como aquí se supone), puede utilizarse la aproximación matemática que si x <<1, entonces $(1+x)^n \approx (1 + nx)$, y en nuestro caso, al ser h/R << 1, esto puede aplicarse y poner que $(1 + h/R)^{-2} \approx (1 - 2h/R)$

de escape se corresponde **justo** con la velocidad correspondiente a una energía cinética igual a la energía de ligamiento.

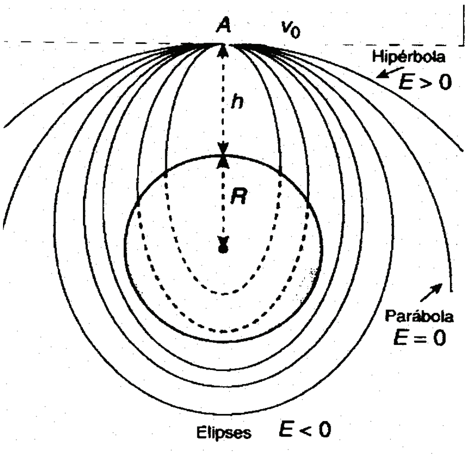
Pensemos ahora en un satélite (o cualquier otro cuerpo de masa m) en órbita alrededor de la Tierra. En ese lugar, la energía que le corresponde, será, igualmente cinética y potencial, de valores:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Al moverse en una órbita circular, la fuerza gravitatoria hace las veces de fuerza centrípeta, con lo que

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$
$$deducimos:$$
$$E = -G\frac{Mm}{2r}$$

La última expresión nos indica que la energía total es negativa. ¿Cómo se interpreta esto?



Distintas posibilidades de trayectorias de un objeto que es lanzado desde una altura h "horizontalmente". Obsérvese que TODAS las de E < 0 son cerradas

Este resultado es más general de lo que podría parecer al principio: todas las órbitas elípticas (o cerradas) tienen una energía total negativa (E<0) cuando definimos la energía potencial como cero en el infinito. Una órbita cerrada significa que la energía cinética no es suficiente en ningún punto de la órbita para llevar la partícula al infinito, para lo cual cambiaría su energía cinética en potencial y vencería la atracción gravitacional. Esto puede verse porque, a una separación infinita, el segundo término de la primera ecuación de la energía del satélite en órbita vale cero, y debemos tener E = ½ mv^2, ecuación que es imposible satisfacer si E es negativa.

Por supuesto que si E >0, la partícula puede llegar al infinito y tener aún energía cinética. En el caso de E = 0 la partícula llega al infinito, pero allí se detiene.

Estrictamente hablando, en los lanzamientos de satélites se aprovecha *la velocidad de rotación de la Tierra* en los puntos donde ésta es máxima, esto es, en el Ecuador; de ahí que lugares como la Guayana Francesa o cabo Cañaveral sean lugares idóneos para los lanzamientos. En aquéllos casos donde se considere, bastará incluir en los balances de energía la Ec de rotación terrestre, en cuyo caso, la Ec a suministrar en el lanzamiento será menor.

La puesta en órbita de un satélite a una distancia "r" tiene lugar en varias etapas. La primera de ellas lanza desde la Tierra el satélite hasta que éste alcance una altura MÁXIMA "r" (con Ec = 0 en ese punto) y acto seguido el satélite recibe un empuje final justo en ese punto. Dependiendo del valor de ese empuje, el satélite quedará en órbita, caerá en la Tierra o escapará de la acción gravitatoria, tal y como se recoge en la figura. A la velocidad que se necesita imprimir al satélite para que quede en órbita circular, se la denomina **órbita de inserción**.

Para el caso de una órbita elíptica estable alrededor de la Tierra, el satélite es lanzado desde un transbordador espacial o lanzadera con la velocidad necesaria para mantenerse en una órbita de transferencia, que NO es la órbita definitiva del satélite. En el apogeo de esa órbita el satélite es inyectado en su órbita definitiva mediante motores propulsores, y una vez situado en esa órbita definitiva, el satélite puede corregir las desviaciones que se produzcan gracias a sus motores.

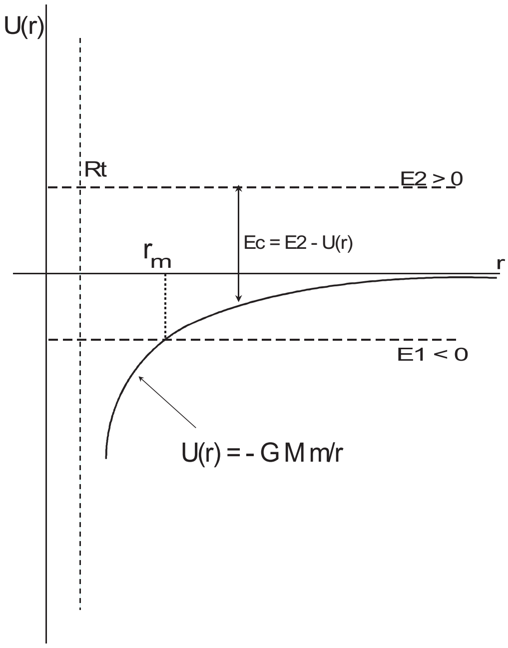
En realidad y hablando en términos generales, cuando el movimiento es bajo la acción de una fuerza central como es el caso de la gravitatoria, la conservación de la energía no es suficiente para resolver el problema, y se hace necesario usar también la conservación del momento angular, L.

Q14. Calcular la altura a la que se ha de colocar un satélite geoestacionario de 400 kg, sobre el Ecuador, para que en todo momento esté situado sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Calcula también la velocidad con que se mueve. Suponer que Rt = 6500 km. Calcula la cantidad de gasolina (poder calorífico 10.000 kcal/kg) necesaria para poner en órbita el satélite anterior suponiendo un rendimiento del 5 % (suponer que el lanzamiento se realiza desde el ecuador, y que la velocidad de rotación allí es de 465 m/s)

Q15. Calcular la velocidad con que llegará un cuerpo a la superficie de la Tierra, al soltarlo desde una distancia r del centro de la Tierra. Despreciar los efectos del rozamiento y aplicar el principio de conservación de la energía.

Un apunte más sobre la Energía Potencial Gravitatoria y Satélites.

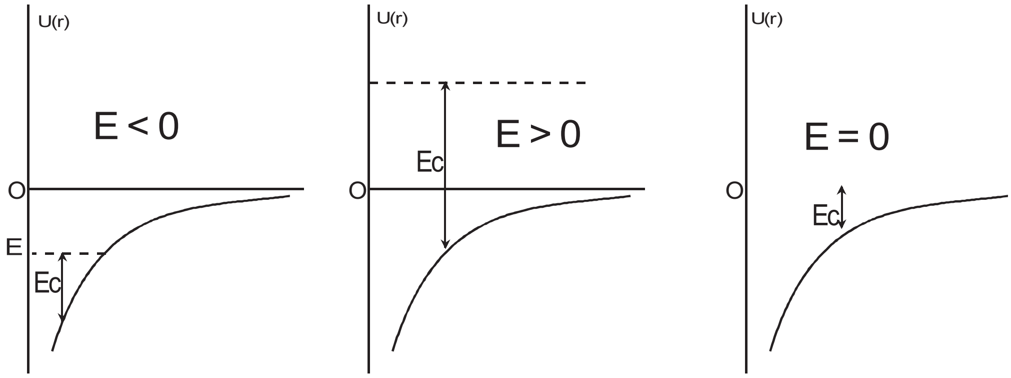
Cuando una masa se halla a pequeñas alturas respecto de la superficie terrestre, es conveniente elegir como nivel cero de referencia para la energía potencial, la propia superficie terrestre, y en estos casos, como ya sabemos, la función energía potencial adquiere el valor mgh. Sin embargo, en los casos en que la separación sea ya muy grande en comparación con el radio terrestre, esta función energía potencial puede simplificarse eligiendo el valor cero de la misma en el infinito, tal y como hemos visto. Esta es una elección que suele hacerse ya por costumbre, de modo que para cualquier otro sitio "diferente del infinito" la energía potencial gravitatoria adquiere valores negativos.

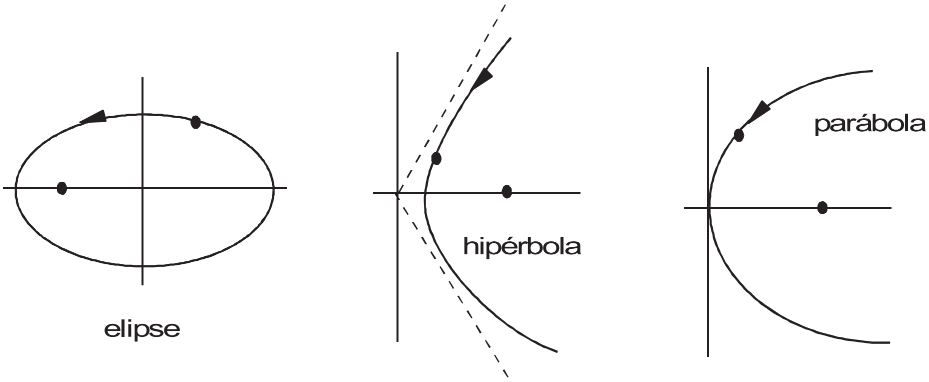


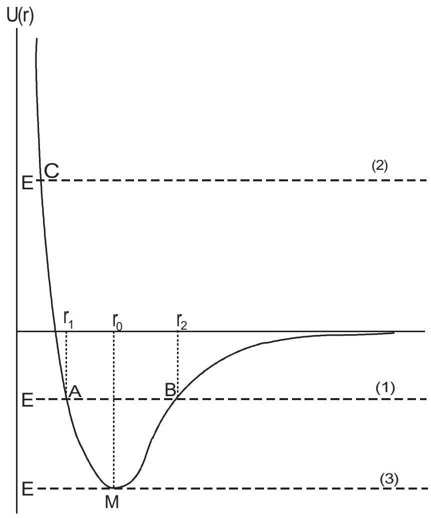
Puede parecer extraño disponer de una función energía potencial que es siempre negativa, pero esto tiene varias ventajas. Como en realidad **lo que tiene relevancia son las VARIACIONES de energía potencial**, no es muy importante conocer el valor real de la función energía potencial.

La figura adjunta muestra una representación gráfica de U(r) en función de la distancia r para el caso de U = 0 para r = ∞. En la superficie terrestre esta función toma el valor negativo U = -GM·m/R_T incrementándose luego según aumenta r y acercándose a cero cuando r = ∞. Los dos valores posibles de la energía TOTAL de la partícula son los indicados en la figura: E1, que es negativo, y E2 que es positivo. El hecho de que la energía total sea negativa solo significa (como ya se ha visto anteriormente) que la energía cinética en la superficie terrestre es menor que G M · m/RT de modo que su magnitud nunca es mayor que la magnitud de la energía potencial negativa. De la figura se deduce que si la energía TOTAL es negativa, la recta correspondiente a esta energía total corta a la curva de la energía potencial en algún punto de separación máxima rm y el sistema es un sistema ligado. Por otro lado, si la energía TOTAL de la partícula es positiva, esa interacción NO se produce y el sistema NO está ligado. En este caso, el criterio para que haya escape es que la energía TOTAL sea igual o mayor que cero. Por tanto, para este criterio de U = 0 para r = ∞, las condiciones para que un sistema sea ligado o no pueden resumirse en

Si E ≤ 0, el sistema es ligado
Si E ≥ 0, el sistema es NO ligado

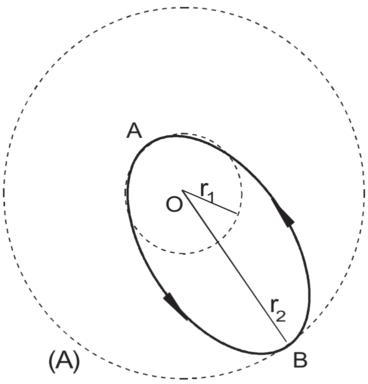


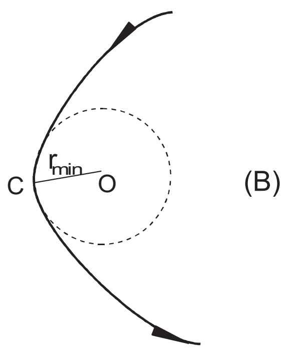




Por supuesto, la energía de ligamiento es la misma independientemente de la elección hecha de energía potencial cero.

Para terminar, habría que indicar brevemente que un análisis más completo de las curvas de energía potencial para el caso importante de fuerzas centrales (no solo las gravitatorias, también las eléctricas), incluyen algunos factores que NO se han tenido aquí en cuenta por limitaciones de tiempo, y limitaciones de tipo matemático. La primera limitación nos impide profundizar en la importante ley de la conservación del momento angular, y la segunda nos impide desarrollar lo anterior usando coordenadas polares. Cuando se hace así, nace un concepto que complementa la gráfica anterior y que se denomina "Energía potencial Efectiva" (que es pequeña a grandes distancias, pero importante a distancias cortas, sobre todo cuando –por ejemplo- se analizan las interacciones entre átomos) y que dan como resultado una curva diferente a la anterior y que se expone adjunta. Con ella por delante pueden explicarse multitud de movimientos y comportamientos, no solo "del tipo planetario" sino incluso los relativos a las interacciones entre átomos para formar (o disociar) moléculas.





Si la energía total de la partícula corresponde, por ejemplo, a la línea horizontal (1) de la gráfica anterior, el radio de la órbita podrá oscilar entre los valores máximo y mínimo r1 y r2 y la órbita podrá tener la forma que se indica en el dibujo (A) de abajo. Pero si la energía corresponde a un valor como el indicado por la línea horizontal (2) de la gráfica, la órbita NO está limitada, y la partícula viene del infinito hasta el punto C de acercamiento mínimo y luego se aleja (dibujo B) sin volver a regresar. Si la energía corresponde al mínimo M de la línea (3), entonces existe UNA sola intersección y la distancia al centro permanece constante, dando como resultado que la partícula describa una trayectoria circular de radio r_0.

UN EJEMPLO en el VUELO DEL APOLO XI en 1969 a la LUNA.

La nave Apolo XI que llevó a hombres a la Luna por primera vez, fue lanzada desde la Tierra hasta alcanzar una órbita casi circular alrededor de la Tierra a una altura de 191 km y con una velocidad de 28 000 km/h (**órbita de transferencia**). A partir de esa órbita se disparó el motor de la nave para darle una velocidad de 39 000 km/h. Esta velocidad, que casi duplica la energía cinética de la nave, es menor que la velocidad de escape que se ha calculado antes, debido a a que la Luna ejerce una atracción gravitatoria que entonces habíamos despreciado. La nave espacial entonces se movió hacia la Luna, disminuyendo su velocidad hasta un punto distante 38 000 km de nuestro satélite, en donde la atracción de la Luna es igual a la atracción de la Tierra (punto de Lagrange). A partir de ese punto, la nave se aceleró hacia la Luna. Cuando la nave pasó la Luna, su energía cinética era mayor que la necesaria para escapar de este astro. En la parte más alejada de la Luna, se dispararon los cohetes retardadores para disminuir la velocidad del mismo y ponerlo en órbita alrededor del satélite. (Esta órbita era elíptica con una altura máxima de 314 km y mínima de 113 km). A partir de esta órbita, el módulo lunar Águila, que contenía a los astronautas Armstrong y Aldrin, se separó de la nave principal y descendió hasta una órbita de unos 15 km de altura. A partir de esa órbita el módulo fue dirigido hasta su alunizaje en la superficie lunar.

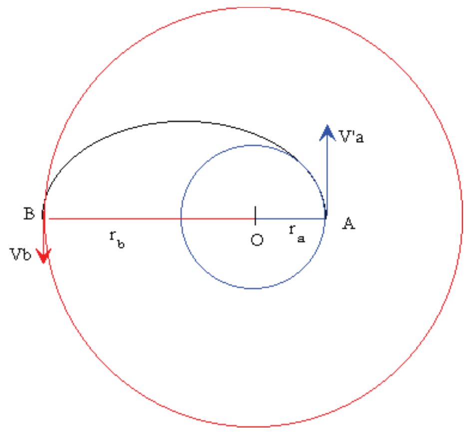
OTRO EJEMPLO DE INTERÉS: Las órbitas de transferencia de Hohman.

Supongamos que queremos enviar una nave espacial desde la órbita de un planeta a la de otro o bien, elevar un satélite de comunicaciones desde una órbita circular ecuatorial de baja altura a otra órbita coplanar y circular de mayor altura.

Para economizar el combustible, es necesario que la nave espacial siga una trayectoria semielíptica denominada órbita de transferencia de Hohmann para lo que es necesario proporcionarle dos impulsos:

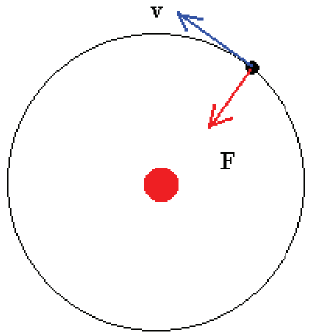
En el punto A cuando la nave espacial pasa de la órbita circular interior a la órbita de transferencia.
En la posición B, cuando la nave espacial pasa de la órbita de transferencia a la órbita circular exterior.

Para resolver el problema propuesto, solamente es necesario hacer uso de las propiedades central y conservativa de la fuerza de atracción gravitatoria que hemos estudiado en páginas anteriores, y de la dinámica del movimiento circular.



Órbita circular interior

Cuando la nave espacial describe una órbita circular de radio rA, el módulo de la velocidad vA se puede calcular aplicando la dinámica del movimiento circular que ya hemos usado



$$\frac{GMm}{r_A^2} = m\frac{v_A^2}{r_A} \qquad v_A^2 = \frac{GM}{r_A}$$

donde M es la masa de la Tierra, G es la constante de la gravitación universal, y m es la masa de la nave que se simplifica en las ecuaciones del movimiento.

Como sabemos, la energía E1 de la nave espacial en la órbita circular inicial es

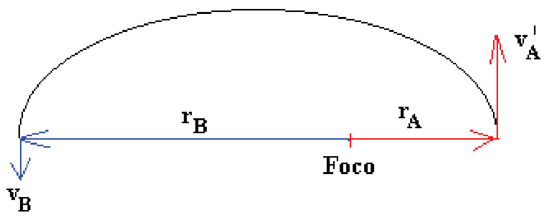
$$E_1 = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = -\frac{GMm}{2r_A}$$

la mitad de la energía potencial

Órbita semielíptica de transferencia

Para calcular la velocidad que debe llevar la nave espacial en el punto A para que alcance la órbita exterior en B, basta aplicar la conservación del momento angular, que también hemos visto al comienzo del tema y escribir

$$mr_A v'_A = mr_B v_B$$



Y dado que la energía se conserva, ésta ha de ser igual en A y en B, por lo que

$$\frac{1}{2}mv'^2_A - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{r_B}$$

Conocidos rA y rB podemos calcular en este par de ecuaciones las incógnitas v'A y vB.

$$v'^2_A = \frac{2GMr_B}{r_A(r_A+r_B)} \qquad v'^2_B = \frac{2GMr_A}{r_B(r_A+r_B)}$$

La energía de la nave espacial es constante en todos los puntos de la trayectoria e igual a

$$E_2 = \frac{1}{2}mv'^2_A - \frac{GMm}{r_A}$$

La energía que hemos de suministrar al satélite en la posición A para que pase de la órbita circular a la trayectoria de transferencia será la diferencia E2-E1 o bien,

$$\Delta E_A = \frac{1}{2}mv'^2_A - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{GMm}{2r_A}\left(\frac{r_B - r_A}{r_B + r_A}\right)$$

Órbita circular exterior

Una vez que la nave espacial llega al punto B, ha de cambiar su velocidad para seguir la trayectoria circular de radio rB. De nuevo, aplicando la dinámica del movimiento circular tenemos

$$\frac{GMm}{r_B^2} = m\frac{v'^2_B}{r_B} \qquad v'^2_B = \frac{GM}{r_B}$$

La energía E3 de la nave espacial en la órbita circular final es

$$E_3 = \frac{1}{2}mv'^2_B - \frac{GMm}{r_B} = -\frac{GMm}{2r_B}$$

La energía que hemos de suministrar al satélite para que pase de la órbita de transferencia elíptica a la órbita circular de radio rB es la diferencia E3-E2 o bien,

$$\Delta E_B = \frac{1}{2}mv'^2_B - \frac{1}{2}mv^2_B = \frac{GMm}{2r_B}\left(\frac{r_B - r_A}{r_B + r_A}\right)$$

Por último, el tiempo que tarda la nave espacial en pasar del punto A al punto B principio y fin de la trayectoria de transferencia, es la mitad del periodo P.

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \qquad a = \frac{r_A + r_B}{2}$$

siendo a, el semieje mayor de la elipse.

PROBLEMAS

1. Si un cuerpo en la superficie terrestre pesa P kp, ¿a qué altura pesará la mitad? Radio de la Tierra, R.

2. Sabiendo que la masa de la Luna es 1/81 de la de la Tierra, y su radio es ¼ del terrestre, calcular el valor de la gravedad en la superficie de la Luna.

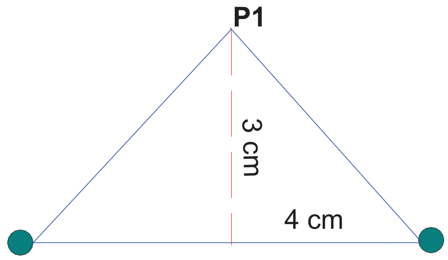
3. Calcular la aceleración de la Tierra hacia el Sol, sabiendo que la Tierra describe una órbita casi circular de $1{,}5.10^8$ km de radio y lleva una rapidez de 30 km/s. A partir de esta aceleración, determinar la masa del Sol.

4. Determina la distancia a la Tierra, en la línea Tierra-Sol del punto en el que se equilibra la fuerza de atracción del Sol y la de la Tierra sobre un cuerpo de masa m. DATOS: distancia Tierra-Sol: $1{,}5.10^8$ km; masa del Sol: $1{,}98.10^{30}$ kg; masa del la Tierra: $5{,}98.10^{24}$ kg.

5. Si la masa de la Luna es, aproximadamente, $6{,}7.10^{22}$ kg y su radio 16.10^5 m, a) ¿Qué distancia recorrerá un cuerpo en un segundo, en caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto cercano a la superficie de aquélla?; b) ¿Cuál será el periodo de oscilación de un péndulo en la superficie lunar, si en la Tierra esta magnitud es de 1 segundo?

6. ¿Cuál sería el periodo de revolución de un satélite artificial de masa m que circunda a la Tierra siguiendo una órbita circular de 8000 km de radio? Masa de la Tierra: $5{,}98.10^{24}$ kg.

7. Determina la aceleración del punto P_1 si está sometido únicamente a la atracción de las dos esferas iguales de la figura. (Masas esferas: 3200 g)



8. Hallar el peso de una persona en la Luna sabiendo que en la Tierra pesa 60 kp. Datos: $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}37.10^6$ m; $M_L = M_T/81$; $R_L = 1{,}74.10^6$ m.

9. Calcula la intensidad del campo gravitatorio sobre la superficie del planeta Marte. DATOS: $M_M = 6{,}38.10^{23}$ kg; $R_M = 3332$ km.

10. Hallar el potencial gravitatorio sobre la superficie terrestre. DATOS: $M_T = 5975.10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

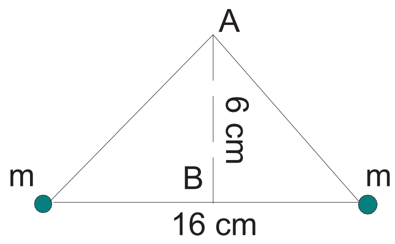
11. Dos masas, $m_1 = 800$ kg y $m_2 = 600$ kg están separadas 0,35 m entre sí. ¿Cuál es la intensidad del campo gravitatorio en un punto situado a 0,2 m de m_1 y 0,15 de m_2? ¿Cuál es el potencial gravitatorio en ese punto?

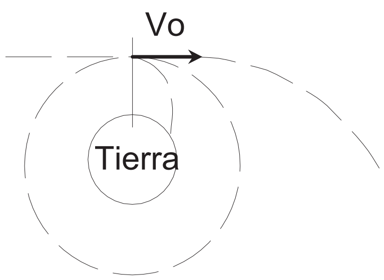
12. En una órbita de 3.10^3 m sobre el nivel del mar, gira un satélite en órbita circular. a) ¿Cuál es el periodo de revolución? b) ¿Cuál es su rapidez? c) ¿Cuánto vale su aceleración centrípeta?

13. Deseamos colocar en órbita alrededor de la Tierra una cápsula espacial a la que hemos de comunicar una rapidez de unos 10 km/s y en la que viajarán seres vivos que no soportan aceleraciones superiores a *"7g"*. a) Julio Verne propuso emplear un cañón gigante. ¿Resistirán los seres vivos la aceleración en el cañón, suponiendo que éste tuviera 1 km de largo?; b) Si para lanzar la cápsula empleamos un cohete animado de una aceleración constante e igual a "6g", ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar los 10 km/s?; c) Si el cohete sigue vertical, ¿cuánto aumentará el peso aparente de los objetos que hay en la cápsula?

14. Dos masas esféricas iguales, de 6,4 kg cada una, están fijadas a dos puntos separadas 16 cm. Una tercera masa se suelta en un punto A equidistante de las masas anteriores y a una distancia de 6 cm de la línea que los une. Si suponemos que la masa móvil es de 100 g, determinar: a) la aceleración de dicha masa cuando está en las posiciones A y B; b) rapidez que llevará cuando pase por B.

DATOS: $G = 6{,}67.10^{-8}$ dinas.cm^2/g^2





15. Desde una altura de 1000 km sobre la superficie de la Tierra, se lanza un cuerpo con cierta velocidad v_0, tal y como aparece en la figura. Determinar para qué valores de la velocidad, el cuerpo quedará en órbita alrededor de la Tierra y para cuáles escapará de la atracción terrestre. Considerar en todos los casos que la órbita es circular y que el radio terrestre es el dado en Q14.
Sol.: si $v_0 > 10{,}313$ km/s, el cuerpo escapa; en caso contrario, queda atrapado.

16. (DE SELECTIVIDAD) Un planeta hipotético describe una órbita circular alrededor del Sol con un radio 3 veces mayor que el de la órbita terrestre; a) ¿Cuántos años terrestres tardaría en recorrer su órbita? B) ¿Cuál sería su velocidad angular?

(Sol.: 5,2 años terrestres; $3{,}83.10^{-8}$ rad.s^{-1})

17. Un satélite de masa *m* se mueve en su órbita circular alrededor de un planeta de masa M. Dar la expresión de la energía total de ese satélite en su órbita.

(Sol.: -GMm/(2(R+h)))

18. Si las relaciones aproximadas entre las masas y los radios de la Tierra y la Luna son, respectivamente, Mt = 81 Ml y Rt = 3,7 Rl: a) ¿Cuánto vale la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna?; b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Luna, la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa *m* es la cuarta parte del valor que tiene en la superficie? DATO: Rl = 1740 km; No considerar los efectos de la atracción gravitatoria terrestre.

19. En la superficie de un planeta de 1000 km de radio, la aceleración de la gravedad es de 2 m/s^2. Calcular: a) La energía potencial gravitatoria de un objeto de 50 kg de masa situado en la superficie del planeta; b) La velocidad de escape desde la superficie del planeta; c) La masa del planeta.

20. Un astronauta se encuentra en un satélite que describe una órbita circular de radio 2 Rt y, en un instante dado, ve pasar un objeto de 60 kg en dirección a la Tierra con una velocidad de 40 m/s. Calcular: a) velocidad del objeto al llegar a la superficie de la Tierra (no considerar rozamientos); b) velocidad y aceleración del satélite en su órbita (Sol.: 7981 m/s; 5644 m/s, 2,5 m/s^2) (DATO: Rt = 6500 km)

21. (DE SELECTIVIDAD) Un satélite de 250 kg de masa se lanza desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en una órbita circular a una altura de 500 km de la superficie. A) Realice un análisis energético del proceso, desde el lanzamiento hasta que se encuentra en órbita. B) Calcule la velocidad orbital y la energía mecánica del satélite. C) Si el radio de la órbita fuera más pequeño, explique cómo cambiaría la velocidad del satélite.

DATOS: $G = 6.63.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; MT = 6.1024 Kg; RT = 6370 km

22. Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es de 700 N, aterriza en el planeta Venus y mide allí su peso, que resulta ser de 600 N. El diámetro de Venus puede admitirse igual que el de la Tierra. A) Explique por qué sucede lo indicado; B) Calcule la relación entre las masas de Venus y de la Tierra; C) ¿Qué relación existe entre las masas de los dos planetas y su periodos de revolución alrededor del Sol?

23. Razonar:
   Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se halla a una distancia infinita de la Tierra?
   ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria? ¿Puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

24. Un cuerpo de 10 kg se lanza con una velocidad de 30 m s^{-1} por una superficie lisa y horizontal hacia el extremo libre de un resorte horizontal, de constante elástica 200 N/m, fijo por el otro extremo.

a) Analizar las variaciones de energía que tienen lugar a partir del instante anterior al impacto con el resorte y calcular la máxima compresión del resorte.

b) Discutir en términos energéticos las modificaciones relativas al anterior apartado si la superficie horizontal tuviera rozamiento.

25. DE SELECTIVIDAD. **JUNIO 2001.** Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su misma masa. A) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie? B) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol? Justifique las respuestas.

26. DE SELECTIVIDAD. **JUNIO 2001.** El satélite de investigación europeo (ERS-2) sobrevuela la Tierra a 800 km de altura. Suponga su trayectoria circular y su masa de 1000 kg. A) Calcule de forma razonada la velocidad orbital del satélite; B) Si suponemos que el satélite está sometido solamente a la fuerza de gravitación terrestre, ¿por qué no cae sobre la superficie? Razone las respuestas.

Astronomical Units/Data

NAME	SYMBOL	NUMBER	EXP	CGS UNITS
Astronomical unit	AU	1.496	13	cm
Parsec	pc	3.086	18	cm
Light year	ly	9.463	17	cm
Solar mass	M_o	1.99	33	g
Solar radius	R_o	6.96	10	cm
Solar luminosity	L_o	3.9	33	erg s^{-1}
Solar Temperature	T_o	5.780	3	K

NAME	MASS (g)		RADIUS (cm)		SEMI-MAJOR (AU)		ECCENTRICITY
Mercury	3.303	26	2.439	8	3.87096	-1	0.205622
Venus	4.870	27	6.050	8	7.23342	-1	0.006783
Earth	5.976	27	6.378	8	9.99987	-1	0.016684
Mars	6.418	26	3.397	8	1.523705	0	0.093404
Jupiter	1.899	30	7.140	9	5.204529	0	0.047826

ENTREVISTA: JUAN GARCÍA-BELLIDO Cosmólogo

"La energía oscura es repulsión gravitatoria"

Los cosmólogos están intentando comprobar una idea feliz, que el universo creció tremendamente nada más nacer, alcanzando un tamaño de fracciones de centímetro. Juan García-Bellido investiga lo que pudo pasar en ese cosmos primitivo. Pero también aborda la misteriosa energía oscura que, al parecer, se traduce en aceleración del Big Bang.

ALICIA RIVERA - Madrid

EL PAÍS - 20-07-2005

Juan García-Bellido Capdevila recuerda exactamente cuándo surgió su fascinación por el universo y decidió que su vocación era investigarlo. Fue a los 14 años -ahora tiene 39-, cuando leyó el libro *Universo,* de Isaac Asimov. Al optar por la física, se convirtió en "la oveja negra", dice, en una familia de biólogos -su padre, su madre y sus tres hermanos-. Profesor de la Universidad Autónoma de Madrid, físico de partículas, García-Bellido es cosmólogo teórico y se dedica a explorar en el Big Bang aquel instante del universo primitivo en que una ignota energía inicial se convirtió en radiación.

Pregunta. ¿Puede contarme la historia del universo según lo que saben ahora los científicos?

Respuesta. Podría haber un momento inicial regido por la gravedad cuántica en el que se originó el universo. Pero no tenemos pruebas de ese inicio, así que son especulaciones. De lo que pasó inmediatamente, y estamos hablando de las primeras fracciones minúsculas de segundo, podríamos tener hoy día algunos indicios: la época inflacionaria.

P. ¿Cómo sería?

R. La idea es que una cierta densidad de energía, cuyo origen y naturaleza no conocemos aún, provocó una tremenda expansión del universo, y en una fracción de segundo pasó de ser un objeto microscópico dominado por la mecánica cuántica a tener una escala macroscópica, del orden de centímetros.

P. ¿La inflación es la frontera a partir de la cual se convierte en el cosmos que vemos?

R. Sí. Sería la fase intermedia entre un origen cuántico y una realidad regida fundamentalmente por la física clásica.

P. El Big Bang no es una gran explosión dentro de un espacio preexistente.

R. No es una explosión y, desde luego, no es nada dentro del espacio-tiempo, sino que es el propio espacio-tiempo el que se va creando al expandirse.

P. La inflación se ideó hace 20 años. ¿Sigue sin comprobarse?

R. Hay indicios de que en el universo muy primitivo ocurrió un crecimiento exponencial. Pero dentro de este esquema general hay muchos modelos posibles de inflación, aunque cada uno hace predicciones concretas que podemos comprobar experimentalmente. Creo que se logrará probar la inflación con la detección de las ondas gravitacionales que genera; en unos diez años habrá equipos capaces de hacerlo.

P. ¿Seguimos con la historia del universo?

R. Después de la inflación, el cosmos ya tiene un tamaño respetable, aunque sigue siendo muy pequeño: algunas fracciones de centímetro. La inflación es algo equivalente a que una canica crezca de repente hasta el tamaño de todo el universo observable hoy día. Cuando el cosmos tiene ya tamaño macroscópico, la energía se convierte en radiación, en partículas elementales. En realidad, la teoría del Big Bang desarrollada en los últimos 60 años empieza en ese momento, al final de la inflación.

P. ¿De dónde sale toda esa energía inicial?

R. No lo sabemos, es un nivel de energía muy superior al que podemos ahora explorar con nuestros aceleradores de partículas.

P. Estábamos en el universo ya macroscópico.

R. Así es, y se va enfriando a medida que se expande -ya normalmente, no de modo inflacionario-. Se forman los quarks (las partículas fundamentales del núcleo atómico), los gluones, los fotones... Desde ese momento hasta ahora tenemos la historia bastante clara, desde el primer segundo de un universo que tiene 13.600 millones de años. En aquel tiempo las temperaturas eran muy altas y las reacciones nucleares muy activas, pero poco después se empezaron a unir neutrones y protones formando los primeros núcleos atómicos de los elementos ligeros, cuya abundancia relativa se ha medido con bastante precisión. Más tarde el universo se enfría lo suficiente como para que los electrones se unan a los núcleos formando átomos; ya no hay electrones libres y el universo, que tenía unos 400.000 años, se hace transparente. Los fotones emitidos entonces nos llegan ahora como radiación de fondo.

P. ¿Y las estrellas y galaxias?

R. En el momento de emisión de esa radiación de fondo había unos ligerísimos grumos de materia que aumentaron de densidad y dieron lugar a las primeras estrellas, hace unos 13.000 millones de años. Es posible que surgieran también agujeros negros supermasivos, y se formaran las galaxias, que luego se fueron agrupando en cúmulos. El universo siguió expandiéndose. Pero hay algo más: sabemos, por la distribución de materia en los cúmulos y por las velocidades de rotación de las galaxias, que algo invisible está actuando gravitacionalmente.

P. ¿La materia oscura?

R. Sí. Es todo un dilema porque no conocemos su naturaleza. Podría tratarse de partículas exóticas que se crearon al final de la inflación... La materia oscura supone un 25% de todo lo que existe, y sólo un 5% es materia normal, de la que están hechas estrellas y planetas y nosotros...

P. ¿Y el resto del universo?

R. Todo lo que he descrito hasta ahora se está expandiendo, y creíamos que debería hacerlo cada vez más despacio, por la atracción gravitatoria, igual que al lanzar una pelota al aire sube, cada vez más despacio, hasta que se para y empieza a caer. Pero en 1998, dos grupos independientes observaron que objetos luminosos muy intensos, las supernovas de tipo Ia, situadas a cientos de millones de años luz de nosotros, se veían con menos luminosidad de lo que deberían dada su distancia, si la expansión del universo estuviera frenándose. Por ello dedujeron que estaba acelerándose.

P. Se planteó que podía haber polvo debilitando su luz.

R. Sí, pero se estudiaron otras supernovas mucho más lejanas y se comprobó que a distancias mayores, que corresponden al universo algo más joven, la expansión era decelerada. En resumen: la expansión del universo iba frenándose, pero en un momento algo empezó a ser dominante y se aceleró. Y se ha medido cuándo: ese cambio se produjo hace unos 5.000 o 6.000 millones de años.

P. ¿Por qué esa aceleración?

R. Todavía no lo sabemos. Es la llamada energía oscura. La hipótesis más sencilla es que se trata de la constante cosmológica que Einstein introdujo en su teoría de la relatividad para ajustarla y obtener un universo estático, respondiendo así a sus prejuicios clásicos de un cosmos estable. Pero luego se descubrió que está en expansión, y ya no hacía falta.

P. ¿Qué sería esa energía oscura o constante cosmológica?

R. Una repulsión gravitacional, en lugar de atracción; por eso acelera la expansión. Tiene una densidad de energía constante, por lo que se hace evidente en el universo a partir de un cierto momento, cuando ha aumentado su volumen, y no antes. Entonces se aprecia la aceleración.

P. ¿La energía oscura es el 70% del cosmos, que se añade a la materia común y a la materia oscura?

R. Cierto. Pero con esto no estamos más que etiquetando nuestra ignorancia, aunque cada día tenemos mayor precisión en las medidas. No conocemos la naturaleza de la energía oscura, lo único que podemos hacer por ahora es estudiar sus consecuencias.

P. ¿Se han hecho más observaciones de la aceleración?

R. Sí, en la radiación de fondo, donde quedaron plasmadas pequeñas inhomogeneidades, cuya evolución en el tiempo informa acerca de esa energía oscura. Y ahora hay dos proyectos para observarla mejor. Uno es un satélite para estudiar varios miles de supernovas. Otro es el Dark Energy Survey, una propuesta en la que participa un grupo español, para observar supernovas, pero también la radiación de fondo y la distribución de materia en el universo.

P. ¿Cuánto tardarán en descifrar la energía oscura, 10 años?

R. Es posible que mucho más, que tengamos que esperar a tener nuevos conocimientos fundamentales de gravitación cuántica para desvelar su naturaleza.

MÁS DETALLES EN

http://www.iesnicolascopernico.org/FQ/Complementos/MATERIA%20OSCURA.pdf

(**MATERIA OCSCURA**. Sección de LECTURAS de la página del departamento www.iesnicolascopernico.org/fisica.htm)

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD

1) Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano inclinado de 30º, con una rapidez inicial de 10 m/s. Se pide: a) explica cualitativamente como varían las energías cinética, potencial y mecánica del cuerpo durante la subida; b) ¿Cómo variaría la longitud recorrida si se duplica la velocidad inicial? ¿y si se duplica el ángulo del plano? Tomar g=10 m/s2.

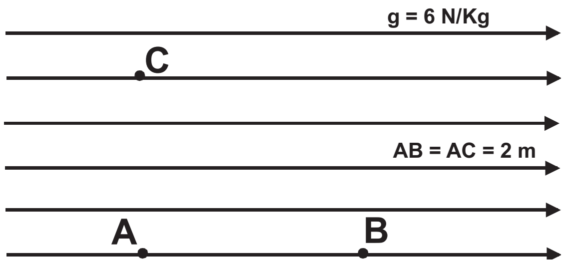
2) a) Explique el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión; b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la de escape?

3) Un muelle de constante elástica 250 N/m horizontal y con un extremo fijo, está comprimido 10 cm. Un cuerpo de 0,5 kg situado en su extremo libre, sale despedido al liberarse el muelle. A) Explica las variaciones de energía del muelle y del cuerpo mientras se estira el muelle. B) Calcula la velocidad del cuerpo en el instante de abandonar el muelle.

4) Una masa de 250 gramos que parte del reposo desde una posición situada a 0,5 metros de altura sobre el suelo se deja caer deslizando por un plano inclinado, llegando al suelo con una rapidez de 2 m/s. ¿cuál ha sido el trabajo realizado por la fuerza de gravedad y cuál el efectuado por la fuerza de rozamiento?
Sol: a) 1,225 J ; b) -0,725 J.

5) Un satélite describe una órbita en torno a la Tierra con un período de revolución igual al terrestre. A) Explica cuántas órbitas son posibles y calcule su(s) radio. B) Determine la relación entre la velocidad de escape en un punto de la superficie terrestre y la velocidad orbital del satélite.

6) En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo. A) Razona el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C. B) Analiza las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.



7) Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B. A) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y compare los valores de la energía cinética y potencial en A y en B. B) ¿En cuál de los puntos es mayor el módulo de la velocidad' ¿Y el de la aceleración?.

Otros problemas...
8) Dos partículas puntuales de masa m, se encuentran fijas en los puntos (a,0) y (-a,0). Calcular: a) campo gravitatorio en un punto de la mediatriz del segmento que une ambas masas, en función de la ordenada del punto; b) velocidad de una tercera masa puntual m, inicialmente en reposo en el punto (0,b), al pasar por el origen.

9) Una masa puntual de 8 kg está situada en el punto (0,0). Calcular: a) punto del eje OY en el que habría que colocar otra masa puntual de 6 kg para que una partícula libre, de 2 kg, se encuentre en reposo en el punto (0,2) m; b) energía potencial gravitatoria de la partícula.
Sol.: 3,71 m; -9,96·10-10 J

10) Calcular: a) la altura sobre la superficie terrestre a la que el valor de g se ha reducido a la mitad; b) potencial gravitatorio terrestre en un punto situado a 6370 km de distancia de la superficie de la Tierra. (Tomar el radio terrestre como 6370 km y su masa como 6·1024 kg)
Sol.: 2638 km; -31,21·106 J/kg

11) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una rapidez de 1000 m/s. a) Calcular la altura máxima que alcanzará. b) repetir el cálculo despreciando la variación de g con la altura y comparar el resultado con el del apartado anterior.(Usar los datos del ejercicio 10).
Sol.: 51,43 km ; 51,02 km

12) Calcular: a) el trabajo que hay que realizar para trasladar un cuerpo de 20 kg desde la superficie terrestre hasta una altura igual al radio de la Tierra; b) rapidez con que habría que lanzarlo para que alcanzara dicha altura. (Usar los datos del ejercicio 9).
Sol.: 6,24·108 J ; 7,9 km/s

13) Un satélite artificial describe una órbita circular a una altura igual a tres radios terrestres sobre la superficie de la Tierra. Calcular: a) rapidez orbital del satélite; b) aceleración del satélite (Usar los datos del ejercicio 9)
Sol.: 3,95 km/s ; 0,6125 m/s2

14) Un satélite se encuentra en órbita geoestacionaria. Calcular: a) rapidez del satélite; b) radio de la órbita. (Usar los datos del ejercicio 9).
Sol.: 3,07 km/s ; 42208 km

15) Calcular la velocidad de escape para un cuerpo situado en: a) la superficie terrestre; b) a una altura de 2000 km sobre dicha superficie. (Usar los datos del ejercicio 9).
Sol.: 11,2 km/s ; 9,74 km/s

16) Un objeto que tiene una masa de 70 kg en la superficie de la Tierra se encuentra en la superficie e un planeta cuyo radio es el doble del terrestre y cuya masa es 8 veces la de la Tierra. Calcular: a) el peso del objeto en dicho lugar; b) tiempo de caída desde una altura de 20 metros sobre la superficie del planeta. (Usar los datos del ejercicio 9).
Sol.: 140 kp; 1,43 s.

17) Estimar la masa de un planeta de 70000 km de radio si un cuerpo que se deja caer desde 50 metros de altura tarda 2 segundos en llegar al suelo.
Sol.: Aprox. 18,3·1026

18) Desde la superficie de la Luna se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una rapidez de 500 m/s. Calcular la altura que alcanza. La masa de la Luna es de 7·1022 kg y su radio de 1700 km.
Sol.: 81,3 km

19) Si en cada uno de los vértices de un cuadrado de 1 metro de lado hay una masa de 1 kg, calcula el valor del potencial gravitatorio y la intensidad del campo gravitatorio en el centro de ese cuadrado.
Sol.: -37,7·10-11 J/kg ; nulo

20) Dos masas puntuales de 4 kg y 5 kg están separadas 1 metro. Si al soltarlas se mueven ambas bajo la única acción de su atracción gravitatoria, calcular sus respectivas aceleraciones.
Sol.: $3,3\cdot10^{-10}$ m/s^2; $2,7\cdot10^{-10}$ m/s^2

21) Un meteorito se encuentra inicialmente en reposo a una distancia sobre la superficie terrestre igual a 6 veces el radio de la Tierra. Calcular la velocidad con que llegaría a la superficie terrestre si en su caída prescindimos del rozamiento con la atmósfera.
Sol.: Aprox 10 km/s

22) Uno de los satélites de Júpiter describe una órbita de 2·106 km de radio en 400 horas. Calcular la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Júpiter sabiendo que su radio es de 74000 km
Sol Aprox. 27 m/s^2

23) Desde la superficie terrestre se lanza un cuerpo para que se ponga en órbita de radio doble del terrestre. Calcular: a) la velocidad de lanzamiento; b) la velocidad orbital; c) el periodo de la órbita.
Sol.: 9,68 km/s; 5,59 km/s; 14380 s.

24) Sabiendo que en la superficie terrestre el módulo de la intensidad del campo gravitatorio es de 9,8 m/s2, calcular la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Marte, sabiendo que su masa es 10 veces menor que la de la Tierra y su radio es la mitad del terrestre.
Sol.: 3,92 m/s^2

25) Con los datos del ejercicio anterior, determinar la velocidad de escape de la superficie de Marte.
Sol.: Aprox 5 km/s

26) Consideremos la Tierra como un cuerpo aislado y de radio 6380 km. Se desea lanzar un satélite de 65 kg de masa que describa una órbita ecuatorial de radio tres veces el radio terrestre desde un punto del ecuador en el que la g = 9,8 m/s^2 y hacia el este. Calcula la energía necesaria para poner en órbita el satélite. Si una vez puesto en órbita pierde energía por rozamiento, ¿qué ocurrirá?.
Sol: $3,379\cdot10^9$ Julios; caerá a una órbita más baja.

27) Un automóvil de 1000 kg de masa pasa del reposo a una velocidad de 100 km/h en 9 segundos. Si no existe el rozamiento, ¿qué potencia desarrolla?. En ese instante pasa a circular por una superficie de coeficiente de rozamiento 0,2 y se desconecta el motor. Determina la distancia recorrida antes de pararse. ¿Dónde va a parar la energía que tenía el coche?

28) Un dispositivo de arrastre utiliza un cable de acero para tirar de una vagoneta de carbón de 2500 kg de masa, a lo largo de un plano inclinado de 30º de inclinación salvando un desnivel de 15 metros. Sabiendo que el movimiento de la vagoneta es uniforme y que el coeficiente de rozamiento con los rieles es de 0,4, se pide: a) Esquema de las fuerzas que actúan sobre la

vagoneta, calculando la fuerza que cada una de las cuatro ruedas aplica sobre el raíl. B) La tensión que soporta el cable. C) La potencia desarrollada por el dispositivo elevador, teniendo en cuenta que la elevación se produce en 30 segundos.

29) Una bala de masa m y velocidad v, pasa a través de la esfera de un péndulo, de masa M y longitud l, saliendo con una velocidad v/2. ¿Cuál es el menor valor de v para el cual el péndulo completa una circunferencia?

30) En lo alto de un balón de radio R se coloca una moneda de masa m. Si se le da a la moneda un ligero empujón horizontal y ésta se desliza a lo largo de la superficie del balón sin rozamiento, calcula: el punto en el que abandona la superficie esférica, la velocidad en ese punto y la velocidad con la que llega al suelo.

RECUERDA QUE PUEDES BAJARTE MÁS PROBLEMAS, EXÁMENES y CONTROLES
de otros cursos desde la
WEB DEL DEPARTAMENTO

www.iesnicolascopernico.org/fisica.htm